5 Lineare Vektorräume

5.1 Der Raum $\mathbb{K}^n$ Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Der Raum $\mathbb{K}^n$ besteht aus n-tupeln in $\mathbb{K}$, die spaltenweise angeordnet werden

$$u = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad x_i \in \mathbb{K}.$$

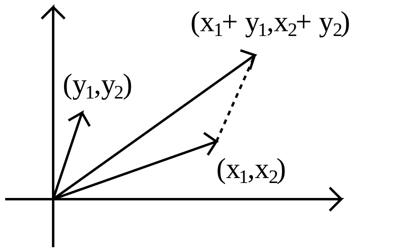
Um weniger Platz zu verbrauchen, schreiben wir dafür auch

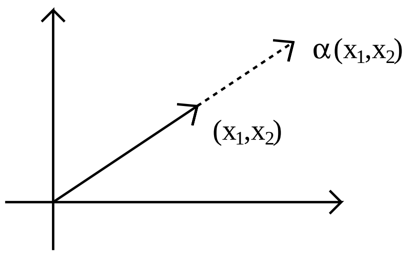
$$u = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T.$$

Die Elemente von $\mathbb{K}^n$ bezeichnen wir als *Vektoren*, die von $\mathbb{K}$ als *Skalare*.

Addition und Skalarmultiplikation definiert man komponentenweise

$$u + v = \begin{pmatrix} x_1 + y_2 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}, \quad \alpha u = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix}$$





Im R^2 können wir einen Vektor zunächst als Punkt in ein Koordinatensystem einzeichnen und diesen dann mit dem Nullpunkt des Koordinatensystems verbinden. Der am Ende in den Punkt eingezeichnete Pfeil gibt die Orientierung des Vektors an. Die Addition zweier Vektoren verläuft anschaulich wie im nebenstehenden Bild. Wir verschieben (y_1, y_2) so, dass sein Fußpunkt auf dem Endpunkt von (x_1, x_2) steht, der Endpunkt des so verschobenen Vektors zeigt dann auf den Endpunkt der Summe.

Für $\alpha \geq 0$ ist der Ergebnisvektor die Verlängerung oder Verkürzung um das α-fache. Bei $\alpha < 0$ kehrt sich zusätzlich die Orientierung um.

Mit

(5.1) $$e_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0)^T, \quad e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)^T, \quad \ldots$$

können wir schreiben

(5.2) $$u = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i.$$

Man bezeichnet $\{e_i\}_{i=1,\ldots,n}$ auch als *kanonische Basis*.

Viele mathematische Objekte lassen sich mit einer offensichtlichen Identifikation auf den $\mathbb{K}^n$ zurückführen:

Beispiele 5.1 (i) Polynome in einer Variablen $x \in \mathbb{R}$ sind von der Form

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i, \quad a_i \in \mathbb{R} \text{ für } i = 0, 1, \ldots, n.$$

Da wir hier beliebige $x \in \mathbb{R}$ einsetzen können, definiert jedes Polynom eine Abbildung $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Polynome addiert man komponentenweise und multipliziert sie komponentenweise mit Elementen $\alpha \in \mathbb{R}$: Für $p(x) = \sum_i a_i x^i$, $p'(x) = \sum_i a'_i x^i$ sowie $\alpha \in \mathbb{R}$ ist

$$p(x) + p'(x) = \sum_i (a_i + a'_i) x^i, \quad \alpha p(x) = \sum_i \alpha a_i x^i.$$

Wir sagen, das Polynom p besitzt den Grad k, wenn $a_k \neq 0$ und wenn $a_i = 0$ für alle $i > k$. Der Raum der Polynome vom Grad $\leq n$ wird mit $\mathbb{P}_n$ bezeichnet. $\mathbb{P}_n$ lässt sich vermöge der Identifikation

$$p(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x^i \;\leftrightarrow (a_0, a_1, \ldots, a_n)^T \in \mathbb{R}^{n+1}$$

mit dem $\mathbb{R}^{n+1}$ identifizieren. Denn zum einen ist dies eine bijektive Abbildung zwischen den angegebenen Räumen. Weiter erhält diese Abbildung die beiden hier definierten algebraischen Operationen Addition und Skalarmultiplikation: Bezeichnen wir die angegebene Abbildung mit $I : \mathbb{P}_n \to \mathbb{R}^{n+1}$, also $Ip = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$, so gilt

$$I(p + p') = Ip + Ip', \quad I(\alpha p) = \alpha I(p) \quad \forall p, p' \in \mathbb{P}_n \; \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

(ii) Hier betrachten wir $(m \times n)$-Schemata der Form

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad a_{ij} \in \mathbb{K} \text{ für } 1 \leq i \leq m, \; 1 \leq j \leq n.$$

Diese Schemata kommen in Form von Tabellen überall vor. Spezieller bezeichnen wir ein solches Schema als $(m \times n)$-Matrix, wenn zusätzlich noch Addition und Skalarmultiplikation definiert sind: Für $(m \times n)$-Matrizen A und B mit erzeugenden Koeffizienten a_{ij} bzw. b_{ij} sowie $\alpha \in \mathbb{K}$ setzen wir

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \ldots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \ldots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \ldots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}, \quad \alpha A = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \ldots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \ldots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \ldots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Man beachte, dass diese Addition nur definiert ist, wenn die beiden Dimensionsgrößen m und n für die beiden Matrizen die selben sind. Für eine $(m \times n)$-Matrix schreiben wir kürzer $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m,\; 1 \leq j \leq n}$ oder manchmal, wenn die Dimensionierung aus dem Zusammenhang klar ist, noch kürzer $A = (a_{ij})$. Damit gilt für $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ einfach $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$, $\alpha A = (\alpha a_{ij})$.

Ähnlich wie im vorigen Beispiel verfahren wir für den Raum $\mathbb{K}^{m \times n}$ der $(m \times n)$-Matrizen und setzen

$$I : \mathbb{K}^{m \times n} \to \mathbb{K}^{mn}, \quad IA = (a_{11}, \ldots, a_{1n}, a_{21}, \ldots, a_{2n}, \ldots, a_{mn})^T,$$

d.h. wir stellen die Zeilen der Matrix A von oben nach unten als Vektor des $\mathbb{K}^{mn}$ zusammen. Diese Abbildung ist bijektiv zwischen den angegebenen Räumen und erhält Addition und Skalarmultiplikation, $I(A + B) = IA + IB$, $I(\alpha A) = \alpha IA$. Wir können den Raum der $(m \times n)$-Matrizen daher komplett mit dem $\mathbb{K}^{mn}$ identifizieren. Der kanonischen Basis für den $\mathbb{K}^{mn}$ entsprechen die kanonischen Basismatrizen für $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$

$$A_{ij} = (\delta_{ij}) \quad \text{mit } \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{falls } i \neq j \end{cases}.$$

□

5.2 Allgemeine lineare Vektorräume Wir betrachten eine Menge V mit einem ausgezeichneten Element $0 \in V$ und einem Körper $\mathbb{K}$. Auf $(V, \mathbb{K})$ sollen zwei Operationen $+ : V \times V \to V$ und $\cdot : \mathbb{K} \times V \to V$ definiert sein, wobei meist kürzer $\alpha \cdot u = \alpha u$ geschrieben wird. Die Menge V heißt *linearer Vektorraum über dem Körper* $\mathbb{K}$, und die Elemente von V dann Vektoren, wenn man mit V und $\mathbb{K}$ so rechnen kann, wie wir es vom $\mathbb{K}^n$ gewohnt sind. Also:

(A1) $(V, 0, +)$ bildet mit der Operation $+$ eine kommutative Gruppe mit dem neutralen Element $0 \in V$.
(A2) Es gelten die beiden distributiven Gesetze für $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $u, v \in V$,

$$\alpha(u+v) = \alpha u + \alpha v, \quad (\alpha+\beta)u = \alpha u + \beta u.$$

(A3) Es gilt ein Assoziativgesetz für die Skalarmultiplikation

$$(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \; u \in V.$$

(A4) Für die 1 des Körpers $\mathbb{K}$ gilt $1 \cdot u = u$ für alle $u \in V$.

Das wichtigste Beispiel für einen linearen Vektorraum ist der im vorigen Abschnitt eingeführte $\mathbb{K}^n$ mit dem Nullvektor $0 = (0, 0, \ldots, 0)$ und den dort definierten Operationen. Aus den Axiomenen lassen sich leicht die Rechenregeln

$$0 \cdot u = 0, \quad \alpha \cdot 0 = 0$$

ableiten. Die Ungenauigkeit unserer Notation, nämlich nicht zwischen $0 \in \mathbb{K}$ und $0 \in V$ zu unterscheiden, wird dadurch ein wenig abgemildert. Die erste Gleichheit folgt aus

$$0 \cdot u = (0+0) \cdot u = 0 \cdot u + 0 \cdot u,$$

und, da (V,+) eine Gruppe ist, $0 \cdot u = 0$. Die zweite Gleichung folgt genauso mit Hilfe des anderen Distributivgesetzes: $\alpha \cdot 0 = \alpha \cdot (0+0) = \alpha \cdot 0 + \alpha \cdot 0$. Zwei weitere aus dem $\mathbb{K}^n$ bekannte Gesetze gelten ebenfalls in allgemeinen Vektorräumen

$$(-1) \cdot u = -u, \quad \alpha u = 0 \;\Rightarrow \alpha = 0 \text{ oder } u = 0.$$

Das linke Gesetz folgt leicht mit

$$(-1) \cdot u + u = (-1+1) \cdot u = 0 \cdot u = u,$$

also ist u invers zu $(-1) \cdot u$. Das zweite Gesetz beweist man so: Ist $\alpha = 0$, so ist in der Tat $\alpha \cdot u = 0$. Ist $\alpha \neq 0$, so können wir beide Seiten mit α^{-1} multiplizieren und aus $\alpha^{-1}(\alpha u) = 0$ folgt mit dem Assoziativgesetz $u = 0$.

Wir nennen eine Teilmenge U eines linearen Vektorraums *Unterraum* von V, wenn U selber ein linearer Vektorraum über $\mathbb{K}$ ist.

Satz 5.2 *Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ und $U \subset V$ eine Teilmenge von V. Dann ist U genau dann ein Unterraum von V, wenn er abgeschlossen bezüglich den beiden Operationen Addition und Skalarmultiplikation ist, wenn also*

$$u + u' \in U \text{ und } \alpha u \in U \text{ für alle } u, u' \in U \text{ und für alle } \alpha \in \mathbb{K}.$$

Wir sagen daher auch, dass U die Axiome (A1)-(A4) von V „erbt".

Beweis: Viel ist hier nicht zu zeigen. Wegen $0u = 0$ ist auch $0 \in U$ und wegen $-u = (-1)u \in U$ ist auch das inverse Element bezüglich der Addition in U. Die weiteren Axiome gelten in U, weil sie bereits in V gelten. □

Beispiele 5.3 (i) Die Menge der Abbildungen von $\mathbb{K}$ nach $\mathbb{K}$ bilden einen linearen Vektorraum über $\mathbb{K}$ mit der punktweisen Addition und Skalarmultiplikation,

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \quad (\alpha f)(x) = \alpha f(x).$$

Der Nullvektor ist die Nullabbildung $x \mapsto 0$ und das inverse Element zu f ist $-f$. Die Axiome folgen aus den Rechenregeln für $\mathbb{K}$. Jeder Polynomraum $\mathbb{P}_n$ ist demnach ein Unterraum dieses Raumes.

(ii) Neben dem trivialen Unterraum $U = \{0\}$ und dem ganzen Raum, der immer Unterraum von sich selbst ist, gibt es im $\mathbb{R}^2$ als Unterräume nur noch die Geraden, die durch den Nullpunkt laufen. Sie werden von einem Vektor $u \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ erzeugt durch $U_u = \{\alpha u : \alpha \in \mathbb{R}\}$. Dieses Beispiel zeigt auch, dass im Allgemeinen $U_1 \cup U_2$ keine Unterraumstruktur besitzt. Liegen $u_1 \neq 0$ und $u_2 \neq 0$ nicht auf einer Geraden, so ist $u_1 + u_2 \notin U_1 \cup U_2$. □

5.3 Linearkombinationen und erzeugende Systeme Sei ab nun V ein linearer Vektorraum über dem Körper $\mathbb{K}$. Für Vektoren $u_1, \dots, u_k$ und Skalare $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ heißt

$$u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_k u_k = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_i$$

eine *Linearkombination* der Vektoren $u_1, \dots, u_k$. Wir können den Vektoren $u_1, \dots, u_k$ die Menge der mit ihnen erzeugten Linearkombinationen zuordnen

$$U = \left\{ u = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_i : \alpha_i \in \mathbb{K} \text{ für } 1 \leq i \leq k \right\}$$

U ist Unterraum, denn wenn $u = \sum_i \alpha_i u_i$ und $u' = \sum_i \alpha'_i u_i$, so ist auch $u + u' = \sum_i (\alpha_i + \alpha'_i) u_i \in U$ und auch $\alpha u = \sum_i \alpha \alpha_i u_i \in U$. U heißt der von $u_1, \dots, u_k$ *aufgespannte Unterraum* und wird auch mit

$$U = \operatorname{span}\{u_1, \dots, u_k\}$$

bezeichnet.

Ist $U = V$ so heißt $\{u_i\}_{i=1,\dots,k}$ *erzeugendes System* von V.

5.4 Basis und Dimension Für eine Folge von Vektoren $u_1, u_2, \dots$ können wir die Folge von aufgespannten Unterräumen betrachten

$$U_k = \operatorname{span}\{u_1, \dots, u_k\}.$$

Klar ist U_k eine aufsteigende Folge von Unterräumen, aber wann wird U_{k+1} echt größer als U_k? Wenn beispielweise u_{k+1} bereits in U_k enthalten ist,

$$u_{k+1} = \sum_{i=1}^{k} \beta_i u_i,$$

so kommt in den Linearkombinationem mit u_{k+1} gegenüber U_k nichts Neues hinzu wegen

$$\sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i u_i = \sum_{i=1}^{k} (\alpha_i + \alpha_k \beta_i) u_i,$$

also gilt in diesem Fall $U_{k+1} = U_k$.

Wir sagen, die Menge von Vektoren $u_1, \dots, u_k$ ist *linear unabhängig* (kurz: l.u.), wenn

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0.$$

In diesem Fall kann keiner der Vektoren u_i als Linearkombination der anderen Vektoren dargestellt werden, denn dann hätten wir ja $u_j = \sum_{i \neq j} \alpha_i u_i$, also $\sum_{i \neq j} \alpha_i u_i - u_j = 0$ und die Vektoren wären nicht linear unabhängig. Man kann das dahinterstehene Prinzip noch etwas markanter formulieren:

Lemma 5.4 *Die Vektoren $u_1, \dots, u_k$ sind genau dann linear unabhängig, wenn jedes $u \in U = \operatorname{span}\{u_1, \dots, u_k\}$ sich eindeutig als Linearkombination der u_i darstellen lässt.*

Beweis: Angenommen, es gäbe zwei Darstellungen von u,

$$u = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_i = \sum_{i=1}^{k} \alpha'_i u_i.$$

Dann folgt $0 = \sum_i (\alpha_i - \alpha_i')u_i$. Die Eigenschaft $\alpha_i = \alpha_i'$ für alle i ist daher äquivalent zur linearen Unabhängigkeit der Vektoren u_i. $\square$

Sind die Vektoren $u_1, \dots, u_k$ nicht l.u., so heißen sie *linear abhängig* (kurz: l.a.). In diesem Fall gibt es eine nichttriviale Linearkombination zur 0, also $\sum_i \alpha_i u_i = 0$ mit mindestens einem $\alpha_{i_0} \neq 0$. In diesem Fall können wir nach $u_{i_0} = -\sum_{i \neq i_0} \alpha_i/\alpha_{i_0} u_i$ auflösen. Kurz: Die Vektoren $u_1, \dots, u_k$ sind genau dann l.a., wenn man zum Aufspannen des Unterraums $U_k = \operatorname{span}\{u_1, \dots, u_k\}$ nicht alle Vektoren $u_1, \dots, u_k$ benötigt.

Eine nichtleere Menge $M \subset V$ heißt linear unabhängig, wenn alle endlichen Teilmengen von M linear unabhängig sind. Andernfalls heißt M linear abhängig.

Beispiele 5.5 (i) Sei $V = \mathbb{K}^n$ und seien e_i, $i = 1, \dots, n$, die kanonischen Basisvektoren aus (5.1). Wegen

$$u = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

sind die Vektoren $\{e_i\}_{i=1,\dots,n}$ l.u.: Jeder Vektor e_i ist sozusagen für die i-te Komponente zuständig.

(ii) Enthält eine Menge den Nullvektor, ist sie linear abhängig, denn der Nullvektor ist bereits selber l.a.

(iii) Sind $u_1, \dots, u_k$ l.u. und sind $\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}$ beliebige Skalare, so sind auch die Vektoren $u_1 - \lambda_1 u_k, \dots, u_{k-1} - \lambda_{k-1} u_k, u_k$ l.u.. Es gilt nämlich

$$\sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i (u_i - \lambda_i u_k) + \alpha_k u_k = 0 \;\Rightarrow\; \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i u_i + \Big(\alpha_k - \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i \alpha_i\Big) u_k = 0,$$

und wegen der linearen Unabhängigkeit folgt zunächst $\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1} = 0$ und schließlich $\alpha_k = 0$.

(iv) (Aufgabe) Eine Menge $v_1, \dots, v_n$ sei l.u. in einem Vektorraum V. Für $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ sei $w = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$. Man formuliere eine notwendige und hinreichende Bedingung an die α_i, so dass auch die Vektoren

$$x_i = v_i - w, \quad i = 1, \dots, n$$

l.u. sind.

Aus $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = 0$ folgt

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \Big(v_i - \sum_{k=1}^n \alpha_k v_k\Big) = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i - \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \lambda_i \alpha_k v_k \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i - \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \lambda_k \alpha_i v_i = \sum_{i=1}^n \Big(\lambda_i - \alpha_i \sum_{k=1}^n \lambda_k\Big) v_i. \end{aligned}$$

Aus der linearen Unabhängigkeit der v_i folgt

$$\lambda_i - \alpha_i \sum_{k=1}^n \lambda_k = 0, \quad i = 1, \dots, n. \tag{5.3}$$

Wir summieren bezüglich i,

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i - \sum_{i=1}^n \alpha_i \sum_{k=1}^n \lambda_k = 0$$

und erhalten $\sum_i \lambda_i = 0$, sofern $\sum_i \alpha_i \neq 1$. Aus (5.3) folgt dann $\lambda_i = 0$ für alle i. Damit sind die Vektoren x_i l.u. Falls $\sum_i \alpha_i = 1$, so ist $\lambda_i = \alpha_i$ eine nichttriviale Lösung des Gleichungssystems (5.3). Damit sind die Vektoren in diesem Fall l.a. $\square$

Wir sagen, der lineare Vektorraum V wird *endlich erzeugt*, wenn eine endliche Menge von Vektoren den Raum V aufspannen.

Lemma 5.6 *V werde von den n Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ erzeugt. Dann ist jede $n+1$-elementige Menge $M \subset V$ l.a..*

Beweis: Angenommen, die Menge $M = \{w_1, \ldots, w_{n+1}\}$ ist l.u.. Wir tauschen sukzessive ein Element von M gegen ein Element von $N = \{v_1, \ldots, v_n\}$ aus. Da die Elemente von N den Raum V erzeugen, gibt es $\alpha_i \in \mathbb{K}$ mit $w_1 = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$. Da w_1 nicht der Nullvektor ist, gibt es ein $\alpha_{i_0} \neq 0$, sagen wir $i_0 = 1$. Damit

$$v_1 = \frac{1}{\alpha_1}\Big(w_1 - \sum_{i=2}^n \alpha_i v_i\Big). \tag{5.4}$$

Wir tauschen in N v_1 gegen w_1 aus und erhalten die modifizierte Menge $N' = \{w_1, v_2, \ldots v_n\}$. N' ist nach wie vor erzeugend, denn in jeder Linearkombination von $v_1, \ldots, v_n$ können wir v_1 nach (5.4) durch w_1 und die übrigen v_i ausdrücken. Auf diese Weise fahren wir fort und tauschen nach und nach die anderen Elemente von N aus. Dieser Austauschprozess kommt zum Erliegen, wenn in $w_{k+1} = \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i w_i + \sum_{i=k}^n \alpha_i v_i$ die α_i mit $i \geq k$ alle verschwinden. In diesem Fall ist w_{k+1} eine Linearkombination der w_i und die Ausgangsmenge M l.a.. Geht der Austauschprozess bis zum Ende durch, so ist N vollständig ersetzt durch $\{w_1, \ldots, w_n\}$ und w_{n+1} lässt sich als Linearkombination der w_i für $i \leq n$ darstellen. Auch in diesem Fall sind die Vektoren in M l.a.. $\Box$

Nun kommt der wichtigste Begriff der linearen Algebra: Ein linear unabhängiges erzeugendes System von V heißt *Basis* von V. Aus dem letzten Lemma folgt: Besitzt ein Vektorraum eine Basis mit endlich vielen Elementen, so haben alle Basen dieses Raumes dieselbe endliche Zahl von Elementen.

Satz 5.7 *Jeder endlich erzeugte Vektorraum besitzt eine Basis.*

Beweis: Sei $\{u_1, \ldots, u_k\}$ ein erzeugendes System des Vektorraums V. Sind die u_i l.u., so sind wir fertig. Andernfalls gilt für einen Index i_0

$$u_{i_0} = \sum_{i \neq i_0} \alpha_i u_i.$$

Wir können das u_{i_0} aus der Menge $\{u_1, \ldots, u_k\}$ entfernen, die Menge bleibt erzeugend. Denn in jeder Linearkombination der u_i kann mit der letzten Gleichung das u_{i_0} eliminiert werden. Nach endlich vielen Schritten dieser Konstruktion erhalten wir eine Basis von V. $\Box$

Ein endlich erzeugter Vektorraum V heißt *endlich dimensional*. Die Mächtigkeit $n \in \mathbb{N}$ der Basis heißt *Dimension* von V. Wir schreiben dann $\dim V = n$ und setzen für den etwas pathologischen Fall $\dim\{0\} = 0$. Ist V nicht endlich erzeugt, so schreiben wir $\dim V = \infty$.

Beispiele 5.8 (i) Es gilt $\dim \mathbb{K}^n = n$ und die einfachste Basis ist die kanonische Basis $\{e_i\}_{i=1,\ldots,n}$ wie in (5.1),(5.2).

(ii) $\mathbb{C} = \mathbb{C}^1$ ist Vektorraum über $\mathbb{C}$ und es gilt natürlich $\dim \mathbb{C} = 1$. Wir können $\mathbb{C}$ aber auch als $\mathbb{R}$-Vektorraum auffassen und in diesem Fall gilt $\dim \mathbb{C} = 2$ mit den kanonischen Basisvektoren 1 und $i = \sqrt{-1}$. Dies entspricht unserer „reellen“ Vorstellungswelt, in der die komplexen Zahlen als ebene Vektoren dargestellt werden.

(iii) Auch unendlich dimensionale Vektorräume besitzen eine Basis, allerdings gibt es i.A. kein Verfahren, um eine solche Basis zu konstruieren. Eine Ausnahme bildet der einfachste unendlich dimensionale Vektorraum c_{00}, der aus den endlichen Folgen besteht. Gedanklich verlängern wir eine endliche Folge durch Nullen zu einer unendlichen Folge. Auf diesen verlängerten Folgen können wir wie gewohnt komponentenweise addieren und mit Skalaren multiplizieren. In beiden Fällen verbleibt der Ergebnisvektor im Raum der endlichen Folgen. Die kanonischen Einheitsvektoren $\{e_i\}$ bilden wieder eine Basis dieses Raumes, diesmal allerdings für $i = 1, 2, \ldots$. Damit ist $\dim c_{00} = \infty$ und der Raum ist abzählbar dimensional. □

Satz 5.9 *Sei* $\dim V = n$ *und für* $s < n$ *seien* $b_1, \ldots, b_s$ *l.u.. Dann gibt es* $b_{s+1}, \ldots, b_n \in V$*, so dass* $b_1, \ldots, b_n$ *eine Basis von* V *ist.*

Bemerkung 5.10 Der Satz kann auch verwendet werden, um eine Basis zu konstruieren. In diesem Fall startet man mit einem beliebigen $b_1 \in V \setminus \{0\}$. □

Beweis: Da alle Basen die gleiche Kardinalität besitzen, ist $V_s = \operatorname{span}\{b_1, \ldots, b_s\}$ echt in V enthalten. Es gibt daher ein $b_{s+1} \in V \setminus V_s$. Wäre in

$$\sum_{i=1}^{s+1} \alpha_i b_i = 0$$

$\alpha_{s+1} \neq 0$, so $b_{s+1} = -\sum_{i=1}^{s} \alpha_i/\alpha_{s+1} b_i \in V$. Daher ist $\alpha_{s+1} = 0$ und aus der linearen Unabhängigkeit von $b_1, \ldots, b_s$ folgt $\alpha_i = 0$ für die übrigen i. Damit sind auch die Vektoren $b_1, \ldots, b_{s+1}$ l.u. und mit dieser Konstruktion erreicht man schließlich das gewünschte Ziel. □

Beispiel 5.11 (Aufgabe) Seien U, V Unterräume eines endlich dimensionalen Vektorraums W. Man konstruiere eine Basis von

$$U + V = \{z = u + v : u \in U, v \in V\}.$$

Ist $U \subset V$ oder $V \subset U$, so ist $U + V = V$ oder $U + V = U$ und es ist nichts zu zeigen.

Das Problem ist, dass eine Basis von U zusammen mit einer Basis von V zwar den Raum $U + V$ erzeugen, aber im Falle $U \cap V \neq \{0\}$ nicht l.u. sind. Deshalb nehmen wir zunächst eine Basis $w_1, \ldots, w_r$ von $U \cap V$ und ergänzen sie mit dem letzten Satz zu Basen von U beziehungsweise V. Seien also $w_1, \ldots, w_r, u_1, \ldots, u_s$, $w_1, \ldots, w_r, v_1, \ldots, v_t$ Basen von U beziehungsweise V. Dann ist $w_1, \ldots, w_r, u_1, \ldots, u_s, v_1, \ldots, v_t$ ein erzeugendes System von $U + V$, denn in $w = u + v$ können wir u und v mit diesen Vektoren darstellen. Mit $U' = \operatorname{span}\{u_1, \ldots, u_r\}$ und $V' = \operatorname{span}\{v_1, \ldots, v_t\}$ lässt sich jedes $w \in U + V$ auch eindeutig in der Form

$$w = s + u' + v', \quad s \in U \cap V,\ u' \in U',\ v' \in V',$$

schreiben. Damit lässt sich w eindeutig mit den angegebenen Vektoren darstellen. □