4 Zahlen

4.1 Körper – Potenzen und geometrische Summenformel Wir hatten in Abschnitt 2.5 die Potenzen a^n in einem kommutativen Ring definiert. In einem Körper $\mathbb{K}$ können wir für $a \neq 0$ auch negative Potenzen $a^{-n} = (a^n)^{-1}$ erklären. Die in Abschnitt 2.5 angegebenen Potenzgesetze

$$a^{m+n} = a^m \cdot a^n, \quad a^n b^n = (ab)^n, \quad (a^m)^n = a^{mn},$$

gelten nun auch für $m, n \in \mathbb{Z}$, sofern $a, b \neq 0$.

Satz 4.1 *In einem Körper* $\mathbb{K}$ *gilt die* geometrische Summenformel

$$\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}, \quad \textit{für alle } q \neq 1.$$

Beweis: Man verwendet den „Teleskopeffekt“

$$\sum_{i=0}^{n} q^i (1 - q) = \sum_{i=0}^{n} q^i - \sum_{i=0}^{n} q^{i+1} = 1 - q^{n+1}.$$

□

4.2 Angeordnete Körper und die rationalen Zahlen Eine Struktur $\mathbb{K} = (K, 0, 1, +, \cdot, \leq)$ heißt *angeordneter Körper*, wenn $(K, 0, 1, +, \cdot)$ ein Körper und $\leq$ eine totale Ordnung ist, die zudem mit den beiden algebraischen Operationen verträglich ist.

Wir hatten eine Relation $\leq$ eine totale Ordnung genannt, wenn

(O1) $a \leq a$

(O2) $a \leq b$ und $b \leq c \Rightarrow a \leq c$.

(O3) Für a, b gilt genau eine der folgenden Relationen

$$a < b, \quad a > b, \quad a = b.$$

Hier bedeutet $a < b$, dass $a \leq b$ und $a \neq b$ erfüllt ist.

Unter der Verträglichkeit von $\leq$ verstehen wir, dass die beiden *Anordnungsaxiome*

(A1) $a \leq b \;\Rightarrow\; a + c \leq b + c$,

(A2) $a \leq b$ und $c \geq 0 \Rightarrow ac \leq bc$,

erfüllt sind.

Satz 4.2 *Im angeordneten Körper gelten die folgenden Rechenregeln*

(a) $a \leq b \;\Leftrightarrow\; -b \leq -a$.

(b) $ab \geq 0 \;\Leftrightarrow\; a, b \geq 0$ *oder* $a, b \leq 0$.

Insbesondere ist $a^2 > 0$ *für* $a \neq 0$ *sowie* $1 = 1^2 > 0$.

(c) *Ist* $a \leq b$, *so gilt* $ac \geq bc$ *für* $c \leq 0$.

(d) *(a)-(c) bleiben richtig, wenn man* $\leq$ *durch* $<$ *und* $\geq$ *durch* $>$ *ersetzt.*

Beweis: (a) Auf $a \leq b$ addieren wir auf beiden Seiten $-a-b$.

(b) Für $a, b \geq 0$ folgt aus (A2) $ab \geq 0$. Ferner folgt für $a \leq 0$ aus (a), dass $-a \geq 0$. Für $a, b \leq 0$ daher $0 \leq (-a)(-b) = ab$. Ist $a \leq 0$, $b \geq 0$ (oder umgekehrt), so folgt mit analoger Argumentation $ab \leq 0$.

(c) Auch hier ist wieder nach (A2) $a(-c) \leq b(-c)$, also $-ac \leq -bc$ und nach (a) $bc \leq ac$. □

Kombinieren wir $1 > 0$ mit (A1), so erhalten wir $0 < 1 < 1+1 < \ldots$. Wir können diese Folge mit den natürlichen Zahlen identifizieren, also $\mathbb{N} \subset \mathbb{K}$ für jeden angeordneten Körper $\mathbb{K}$. Mit $n \in K$ ist auch $-n \in K$, womit auch die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ in K sind. Ferner ist $m/n \in K$ für $m \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Damit finden wir auch den aus ganzzahligen Brüchen bestehenden Körper $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen in jedem angeordneten Körper wieder. Gleichzeitig ist $\mathbb{Q}$ der minimale angeordnete Körper. Insbesondere können alle endlichen Körper nicht angeordnet werden.

Wir können also die Grundrechenarten innerhalb von $\mathbb{Q}$ uneingeschränkt ausführen, trotzdem lässt $\mathbb{Q}$ noch einige Wünsche offen:

Satz 4.3 *Es gibt keine rationale Zahl r mit $r^2 = 2$.*

Beweis: Angenommen, für teilerfremde $m, n \in \mathbb{N}$ wäre $(\frac{m}{n})^2 = 2$. Dann folgt $m^2 = 2n^2$. Da die rechte Seite durch 2 teilbar ist, muss auch die linke durch 2 teilbar sein, also $m = 2k$ und $4k^2 = 2n^2$. In dieser Identität kann durch 2 geteilt werden, $2k^2 = n^2$. Mit der gleichen Argumentation wie vorher folgt, dass auch n durch 2 teilbar ist. Da m und n durch 2 teilbar sind, erhalten wir einen Widerspruch zur Annahme, dass m und n teilerfremd sind. □

Man kann sich der „Lückenhaftigkeit“ der rationalen Zahlen auch durch Dezimalzahlen der Form

$$n + \sum_{k=1}^{\infty} a_k 10^{-k}, \quad n \in \mathbb{N}_0 \text{ und } a_k \in \{0, 1, \ldots, 9\}, \tag{4.1}$$

nähern. Der Einfachheit halber betrachten wir hier und im Folgenden nur nichtnegative Zahlen.

Satz 4.4 *Eine Zahl ist genau dann rational, wenn ihre Dezimalentwicklung periodisch ist, wenn der Dezimalbruch also von der Form*

$$0, a_1 \ldots a_k \overline{b_1 \ldots b_l}$$

ist.

Beweis: Sei

$$x = 0, a_1 \ldots a_k \overline{b_1 \ldots b_l}.$$

Dann ist

$$10^k x = a_1 \ldots a_k, \overline{b_1 \ldots b_l}, \quad 10^{k+l} x = a_1 \ldots a_k b_1 \ldots b_l, \overline{b_1 \ldots b_l}$$

und

$$(10^{k+l} - 10^k) x = a_1 \ldots a_k b_1 \ldots b_l - a_1 \ldots a_k$$

Damit ist x rational. Insbesondere ist $0, \overline{9} = 1$.

Für die umgekehrte Richtung erinnern wir an den Divisionsalgorithmus für die Division zweier natürlicher Zahlen. In jedem Teilschritt von $m : n$ führen wir eine Division mit Rest aus: $m' \operatorname{div} n = a$ mit Rest $r \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Entweder wir gelangen irgendwann zum Rest $r = 0$, dann ist die Zahl nichtperiodisch, oder wir kommen zu einem Rest, den wir bereits hatten. Von da an ist die Dezimalzahl periodisch. □

Der Beweis lässt sich in jedem Stellenwertsystem mit Grundzahl $g > 1$ auf die gleiche Weise durchführen. Allerdings hängt es von g ab, ob $m : n$ eine endliche g-adische Darstellung besitzt oder nicht.

Für eine rationale Zahl x bezeichnen wir mit $\lfloor x \rfloor$ die größte ganze Zahl $\leq x$, z.B. $\lfloor 1,3 \rfloor = 1$, $\lfloor -1,3 \rfloor = -2$. Für $0 \leq x < 1$ berechnen wir die Ziffern in $x = 0,a_1a_2\ldots_g$ durch folgenden Algorithmus. Setze $x_0 = x$ und bestimme für $k = 0,1,\ldots$

$$y_{k+1} = g \cdot x_k, \quad a_{k+1} = \lfloor y_{k+1} \rfloor, \quad x_{k+1} = y_{k+1} - a_{k+1}.$$

Beispiel 4.5 Wir stellen $x = 0,1$ im Dreiersystem dar und schreiben die Ziffern in Klammern

$$0,1 \to 0,3\ (0)\ \to 0,9\ (0)\ \to 2,7\ (2)\ \to 0,7 \to\ 2,1\ (2) \to 0,1,$$

daher $0,1 = 0,\overline{0022}_3$. □

4.3 Reelle Zahlen Die reellen Zahlen bestehen aus allen Dezimalbrüchen der Form (4.1). Im Gegensatz zu den rationalen Zahlen ist die Definition der reellen Zahlen mit einem Grenzübergang verbunden, der hier weiter erläutert wird. Dem reellen Dezimalbruch $x = 0,a_1a_2\ldots$ können wir rationale Zahlen

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} a_k 10^{-k} = 0,a_1a_2\ldots a_n, \quad y_n = x_n + 10^{-n}$$

zuordnen. Anschaulich liegt die reelle Zahl „zwischen“ x_n und y_n. Die Paare $(x_n,y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bilden eine *Intervallschachtelung*: Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist steigend, die Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist fallend und für die Differenz gilt $y_n - x_n \leq 10^{-n}$.

Die reellen Zahlen sind unabhängig von der Grundzahl g. Wie in Beispiel 4.5 können wir jeden Dezimalbruch in einen g-adischen Bruch umwandeln.

Um noch einen anderen Zugang zu den reellen Zahlen anzugeben, wiederholen wir einige Begriffe aus Abschnitt 1.3. Eine Teilmenge A in einer angeordneten Menge K heißt *nach unten (oben) beschränkt*, wenn es ein $\xi \in K$ gibt mit $\xi \leq a$ ($\xi \geq a$) für alle $a \in A$. ξ heißt in diesem Fall *untere (obere) Schranke* von A. Ist die Menge A sowohl nach unten als auch nach oben beschränkt, so heißt A *beschränkt*.

ξ heißt *größte untere Schranke* von A oder *Infimum* von A, wenn für jede andere untere Schranke ξ' gilt $\xi' \leq \xi$. Entsprechend heißt ξ *kleinste obere Schranke* oder *Supremum* von A, wenn für jede andere obere Schranke ξ' gilt $\xi' \geq \xi$. In diesen Fällen schreiben wir $\xi = \inf A$ beziehungsweise $\xi = \sup A$. Gehört ein Infimum (Supremum) selber zu A, so heißt es *Minimum (Maximum)*.

Infimum und Supremum einer Menge A sind eindeutig bestimmt, denn wären beispielsweise ξ und η Infima, so würde aufgrund der Definition sowohl $\xi \leq \eta$ als auch $\eta \leq \xi$ gelten, was wegen des Trichotomiegesetzes $\xi = \eta$ impliziert.

Beispiel 4.6 Wir bestimmen, sofern vorhanden, Supremum, Infimum, Maximum und Minimum der Menge

$$M = \{2^{-m} + n^{-1} : m,n \in \mathbb{N}\}.$$

Offenbar ist 0 eine untere Schranke. Da sowohl 2^{-m} als auch n^{-1} für große m,n beliebig klein werden, ist 0 auch die größte untere Schranke. Diese wird aber in der Menge nicht angenommen, ein Minimum gibt es daher nicht. Das maximale Element erhält man für $m = n = 1$, womit $3/2$ das Maximum von M ist. □

Sei $\mathbb{K}$ ein angeordneter Körper. Ist zusätzlich noch

(V) Vollständigkeitsaxiom: Jede nichtleere, nach oben beschränkte Menge besitzt ein Supremum.

erfüllt, so heißt $\mathbb{K}$ der *Körper der reellen Zahlen* und wird mit $\mathbb{R}$ bezeichnet.

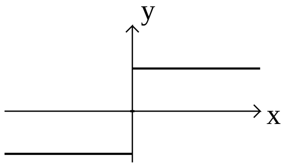
Der Leser hat vielleicht bemerkt, dass im Gegensatz zu den bisherigen Definitionen die letzte auch eine Aussage enthält, dass nämlich der Körper $\mathbb{R}$ *eindeutig* durch die Axiome festgelegt wird.

Im Körper $\mathbb{Q}$ gilt das Vollständigkeitsaxiom nicht, denn wir hatten bereits in Satz 4.3 gesehen, dass $x^2 = 2$ in $\mathbb{Q}$ keine Lösung besitzt. Damit hat die nach oben beschränkte Menge $M = \{x : x^2 < 2\}$ kein Supremum in $\mathbb{Q}$. $\mathbb{R}$ enthält neue Zahlen wie eben $\sqrt{2}$, die wir *irrationale Zahlen* nennen.

Satz 4.7 *Ist $a \geq 0$ und $n \in \mathbb{N}$, so besitzt die Gleichung $x^n = a$ genau eine reelle Lösung x mit $x \geq 0$. Diese Lösung wird mit $\sqrt[n]{a}$ bezeichnet und die n-*te Wurzel *aus a genannt.*

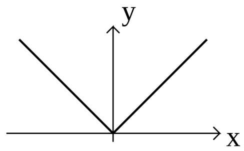
Der Beweis wird später nachgetragen. Man beachte, dass wir die Wurzel nur aus nichtnegativen Zahlen ziehen und dass diese Wurzel eine nichtnegative Zahl ist, obwohl $(-2)^2 = 4$ und $(-3)^3 = -27$.

Zu einer reellen Zahl heißt



$$\operatorname{sgn} a = \begin{cases} 1 & \text{für } a > 0 \\ 0 & \text{für } a = 0 \\ -1 & \text{für } a < 0 \end{cases}$$

das *Vorzeichen* (=Signum) von a. Ferner heißt $|a| = a \operatorname{sgn} a$ oder



$$|a| = \begin{cases} a & \text{für } a \geq 0 \\ -a & \text{für } a < 0 \end{cases}$$

der *Betrag* von a.

Der Betrag hat die drei grundlegenden Eigenschaften

(a) Für $a \neq 0$ ist $|a| > 0$.

(b) Es gilt $|ab| = |a|\,|b|$.

(c) $|a + b| \leq |a| + |b|$ (Dreiecksungleichung).

Die Beweise von (a) und (b) folgen direkt aus der Definition. (c) ergibt sich aus $\pm a \leq |a|$, $\pm b \leq |b|$ und daher

$$a + b \leq |a| + |b|, \quad -(a + b) \leq |a| + |b|.$$

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Man nennt

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$	abgeschlossenes Intervall
$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$	offenes Intervall
$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$	(nach rechts) halboffenes Intervall
$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$	(nach links) halboffenes Intervall

Unbeschränkte Intervalle werden mit Hilfe der Symbole ∞ und $-\infty$ definiert. Für $a \in \mathbb{R}$ heißen die Mengen

$$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} : x < a\}, \quad (a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$$

offene und die Mengen

$$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}, \quad [a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$$

abgeschlossene Intervalle. Die Menge $\mathbb{R}$ wird auch als Intervall $(-\infty, \infty)$ angesehen und sowohl als offen als auch als abgeschlossen definiert.

Die positiven reellen Zahlen werden mit $\mathbb{R}_+$, die negativen mit $\mathbb{R}_-$ bezeichnet. Die Mengen $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$ und $\mathbb{R}_- = (-\infty, 0)$ sind demnach offene Intervalle.

Das Symbol ∞ für unendlich wird in der Analysis häufig benutzt, allerdings immer in einem genau präzisierten Sinn. Das Intervall (a, ∞) ist nur die Kurzbezeichnung für die angegebene Punktmenge, weitreichende philosophische Gedanken sollte man sich nicht machen.

4.4 Das Rechnen mit reellen Zahlen

Beispiele 4.8 (i) Wir bestimmen Infimum und Supremum der Menge

$$M = \{x + \frac{1}{x} : \frac{1}{2} < x \leq 2\}$$

und untersuchen, ob M Minimum und Maximum besitzt. Aus $(x-1)^2 \geq 0$ folgt für $x > 0$

$$x^2 - 2x + 1 \geq 0 \;\Leftrightarrow\; x + \frac{1}{x} \geq 2.$$

Da der Wert 2 für $x = 1$ angenommen wird, ist das Infimum 2 auch Minimum. Für $x \in [\frac{1}{2}, 2]$ gilt

$$\Big|x - \frac{5}{4}\Big| \leq \frac{3}{4}$$

und nach Quadrieren und Division durch x folgt

$$x + \frac{1}{x} \leq \frac{5}{2}.$$

Damit ist das Supremum $\frac{5}{2}$, das für $x = 2$ angenommen wird. $\frac{5}{2} \in M$ ist daher auch das Maximum von M.

(ii) Wir bestimmen die Menge

$$M = \{x \in \mathbb{R} : \frac{x+4}{x-2} < x\}.$$

Um den Bruch umzuformen, unterscheiden wir die Fälle $x > 2$ und $x < 2$,

$$M = M_1 \cup M_2, \quad M_1 = \{x > 2 :\; 0 < x^2 - 3x - 4\}, \quad M_2 = \{x < 2 :\; 0 > x^2 - 3x - 4\}.$$

Mit $x^2 - 3x - 4 = (x+1)(x-4)$ folgt dann

$$M_1 = \{x > 4\}, \quad M_2 = \{-1 < x < 2\}, \quad M = (4, \infty) \cup (-1, 2).$$

(iii) Für $a, b > 0$ wollen wir die Ungleichung

$$\frac{a}{\sqrt{b}} + \frac{b}{\sqrt{a}} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

beweisen. Bevor man solche Ungleichungen in seitenweisen Rechnungen umformt, sollte man sie zu vereinfachen suchen. In diesem Fall ist es naheliegend, beide Seiten durch $\sqrt{b}$ zu teilen, was zu einer äquivalenten Ungleichung in $x = \sqrt{a}/\sqrt{b}$ führt,

$$x^2 + \frac{1}{x} \geq x + 1, \quad x > 0.$$

Auf diese Weise sind wir sowohl eine Variable als auch die Wurzel losgeworden. In dieser Gleichung dürfen wir sogar $x \geq 1$ annehmen, denn andernfalls teilen wir die Ausgangsungleichung durch $\sqrt{a}$. Wir setzen nun $x = 1 + y$ mit $y \geq 0$ und erhalten mit Hilfe der binomischen Formel

$$x^3 - x^2 - x + 1 = (y^3 + 3y^2 + 3y + 1) - (y^2 + 2y + 1) - (y + 1) + 1 = y^3 + 2y^2 + y \geq 0.$$

Damit ist die behauptete Ungleichung bewiesen.

(iv) Für $a, b \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$ gilt

$$\big(\sqrt{\varepsilon}a \pm \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}b\big)^2 \geq 0$$

und es folgt die *Youngsche Ungleichung*

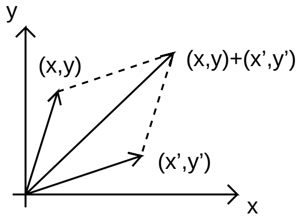
$$|ab| \leq \frac{\varepsilon}{2}a^2 + \frac{1}{2\varepsilon}b^2.$$

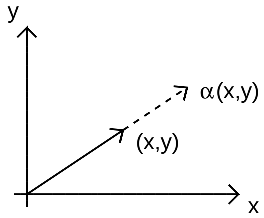
□

4.5 Komplexe Zahlen Sei
$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}.$$
$\mathbb{R}^2$ können wir als Punkte in der Ebene oder als Vektoren mit Komponenten x und y auffassen. Für $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$ definieren wir die Summe durch

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y').$$

Dies ist die übliche Addition zweier ebener Vektoren: Wir verschieben (x', y') so, dass sein Fußpunkt auf dem Endpunkt von (x, y) steht, der Endpunkt des so verschobenen Vektors zeigt dann auf den Endpunkt der Summe (siehe Abbildung links).





Für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $(x, y) \in \mathbb{R}$ ist die *Skalarmultiplikation* definiert durch

$$\alpha\,(x, y) = (\alpha x, \alpha y).$$

Für $\alpha \geq 0$ ist der Ergebnisvektor die Verlängerung oder Verkürzung um das α-fache (siehe Abbildung rechts). Bei $\alpha < 0$ kehrt sich zusätzlich die Orientierung um.

Nach dem Satz des Pythagoras ist die Länge eines Vektors (x, y)

$$|(x, y)| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Bis hierin haben wir nur die üblichen Operationen für Vektoren definiert, was in anderen Raumdimensionen genauso geht. Die Vektoren bilden mit der Addition und dem Vektor $(0, 0)$ eine abelsche Gruppe, die Inverse von (x, y) ist $(-x, -y)$.

Mit Hilfe der Multiplikation

$$(x, y) \cdot (x', y') = (xx' - yy', xy' + yx')$$

kann man, wie wir gleich sehen werden, auf den ebenen Vektoren einen Körper definieren (siehe Abschnitt 3.4). Diese etwas geheimnisvolle Definition ist diesem Ziel geschuldet: Im Wesentlichen gibt es nur diese eine Möglichkeit, aus den Vektoren einen Körper zu machen und sie funktioniert nur im ebenen Fall. Das Element $(1, 0)$ ist neutral bezüglich dieser Multiplikation und die Inverse von $(x, y) \neq (0, 0)$ ist
$$(x, y)^{-1} = \Big(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2}\Big)$$
wegen

$$\begin{aligned}(x, y) \cdot (x, y)^{-1} &= (x, y)\Big(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2}\Big)\\ &= \Big(\frac{x^2}{x^2 + y^2} - \frac{-y^2}{x^2 + y^2}, \frac{-xy}{x^2 + y^2} + \frac{xy}{x^2 + y^2}\Big) = (1, 0).\end{aligned}$$

Da die übrigen Körperaxiome sich leicht nachrechnen lassen, ist der $\mathbb{R}^2$ zusammen mit den so definierten Operationen ein Körper, den wir den *Körper der komplexen Zahlen* nennen und mit $\mathbb{C}$ bezeichnen.

Wir können die Elemente von $\mathbb{C}$ der Form $(x,0)$ mit der reellen Zahl x identifizieren, denn es gilt

$$(x,0)+(y,0) = (x+y,0)$$
$$(x,0)\cdot(y,0) = (xy-0\cdot 0, x\cdot 0+y\cdot 0) = (xy,0).$$

Die komplexe Zahl $i=(0,1)$ heißt *imaginäre Einheit.* Es gilt

$$i^2 = (0,1)\cdot(0,1) = (0\cdot 0-1\cdot 1, 0\cdot 1+0\cdot 1) = (-1,0) = -1.$$

Statt $z=(x,y)$ schreiben wir $z=x+iy$ und können unter Beachtung von $i^2=-1$ „normal" rechnen ($z'=x'+iy'$)

$$z+z' = (x+iy)+(x'+iy') = (x+x')+i(y+y'),$$
$$z\cdot z' = (x+iy)\cdot(x'+iy') = xx'-yy'+i(xy'+yx').$$

Der Leser sollte sich davor hüten, die imaginäre Einheit zu verrätseln, weil sich das Wort imaginär so rätselhaft anhört. Nach wie vor sind die komplexen Zahlen die ebenen Vektoren, auf denen eine Multiplikation definiert ist, die sie zu einem Körper machen. Und die ebenen Vektoren sind genauso wenig imaginär wie alles andere in der Mathematik auch.

Für $z=x+iy$ setzen wir ferner

$$\begin{array}{lll} \overline{z} & = x-iy & \text{komplexe Konjugation von } z, \\ |z| & = \sqrt{x^2+y^2} & \text{Absolutbetrag von } z, \end{array}$$

wobei $|z|$ mit der zuvor definierten Länge $|(x,y)|$ des Vektors (x,y) übereinstimmt. Die komplexe Konjugation bedeutet geometrisch die Spiegelung des Vektors an der x-Achse.

Ferner definieren wir *Real-* und *Imaginärteil* einer komplexen Zahl $z=x+iy$ durch

$$\operatorname{Re} z = x, \quad \operatorname{Im} z = y.$$

Kommen wir nun zu den Rechenregeln für komplexe Zahlen:

Satz 4.9 *Für komplexe Zahlen z, z' gilt:*

(a) $z^{-1} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$ *für* $z\neq 0$.

(b) $|z|^2 = z\overline{z}$.

(c) $\overline{(z\pm z')} = (\overline{z}\pm\overline{z'})$, $\quad \overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$, $\quad \overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$ *für* $z'\neq 0$.

(d) $|\overline{z}| = |z|$, $\quad |zz'| = |z|\,|z'|$, $\quad \left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$.

(e) $\operatorname{Re} z = \dfrac{1}{2}(z+\overline{z})$, $\quad \operatorname{Im} z = \dfrac{1}{2i}(z-\overline{z})$.

(f) $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$, $\quad |\operatorname{Im} z| \leq |z|$.

(g) $|z+z'| \leq |z|+|z'|$, $\quad \big|\,|z|-|z'|\,\big| \leq |z-z'|$.

Beweis: Die Beweise folgen aus den Definitionen, es muss allerdings nachgerechnet werden. (b) folgt aus

$$z\overline{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2+y^2 = |z|^2$$

und daraus bekommen wir (a) durch Erweiterung des Bruchs

$$\frac{1}{z} = \frac{1 \cdot \overline{z}}{z \cdot \overline{z}} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}.$$

Der erste Teil von (c) und (d) folgt direkt aus der Definition der komplexen Konjugation. Die Produktregel in (c) erhalten wir aus

$$\overline{zz'} = \overline{(x+iy)(x'+iy')} = \overline{xx' - yy' + i(yx' + xy')} = (x - iy)(x' - iy') = \overline{z}\,\overline{z'}.$$

Mit (b) folgt die Produktregel in (d)

$$|zz'|^2 = zz'\overline{zz'} = z\overline{z}z'\overline{z'}.$$

Genauer brauchen wir uns nur noch die Dreiecksungleichung (g) anzuschauen, die wir mit (b)-(f) beweisen

$$\begin{aligned}|z+z'|^2 &= (z+z')(\overline{z}+\overline{z'}) = z\overline{z} + z'\overline{z'} + z\overline{z'} + z'\overline{z}\\ &= |z|^2 + |z'|^2 + 2\mathrm{Re}\, z\overline{z'} \le |z|^2 + |z'|^2 + 2|z\overline{z'}|\\ &= |z|^2 + |z'|^2 + 2|z|\,|z'| = (|z| + |z'|)^2.\end{aligned}$$

Für die zweite Ungleichung in (g), *inverse Dreiecksungleichung* genannt, verwenden wir die erste

$$|z| = |z - z' + z'| \le |z - z'| + |z'|.$$

Das umgekehrte Vorzeichen bekommt man, wenn man hier die Rollen von z und z' vertauscht. □

Zu jedem reellen Vektor (x, y) mit $x^2 + y^2 = 1$ gibt es genau ein $\phi \in [0, 2\pi)$ mit

$$x = \cos\phi, \quad y = \sin\phi.$$

ϕ ist dabei der im Gegenuhrzeigersinn gemessene Winkel zwischen der positiven reellen Achse und dem Strahl vom Nullpunkt zum Punkt (x, y). Aus diesem Grund können wir eine komplexe Zahl $z = x + iy$ mit $z \neq 0$ eindeutig in der Form

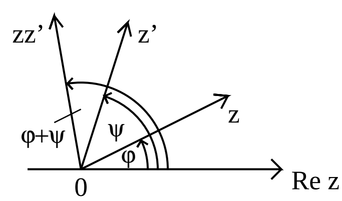
$$z = r(\cos\phi + i\sin\phi) \quad \text{mit } 0 \le \phi < 2\pi, \quad r = |z| > 0,$$

schreiben. r ist der von uns bereits definierte Absolutbetrag und $\phi = \arg z$ heißt *Argument* von z.

Für das Produkt der beiden Zahlen $z = r(\cos\phi + i\sin\phi)$ und $z' = s(\cos\psi + i\sin\psi)$ ergibt sich wegen der Additionstheoreme für Sinus und Kosinus

$$\begin{aligned}z \cdot z' &= rs\big(\cos\phi\cos\psi - \sin\phi\sin\psi + i(\sin\phi\cos\psi + \cos\phi\sin\psi)\big)\\ &= rs\big(\cos(\phi+\psi) + i\sin(\phi+\psi)\big).\end{aligned} \tag{4.2}$$

Der Ortsvektor zz' besitzt demnach die Länge $|zz'|$ und zeigt in Richtung $\phi + \psi$. Beim Produkt zweier komplexer Zahlen werden die Beträge multipliziert und die Argumente addiert.



Beispiel 4.10 Für $z = 1 + i$ gilt $|z| = \sqrt{2}$ und damit

$$1 + i = \sqrt{2}\Big(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\Big), \quad (1+i)^2 = 2\Big(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\Big) = 2(0 + i \cdot 1) = 2i.$$

□