2 Die natürlichen Zahlen und vollständige Induktion

2.1 Einführung Mit $\mathbb{N}$ bezeichnen wir die Menge der natürlichen Zahlen

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}.$$

Manche Autoren lassen die natürlichen Zahlen auch mit der Null beginnen, wir schreiben dafür $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\} = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Wir wollen die folgende Formel für die Summe der ersten n ungeraden Zahlen beweisen

$$(A_n) \qquad 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Für $n = 1$ erhalten wir auf der linken Seite 1 und auf der rechten $1^2 = 1$. Überprüfen wir ferner den Fall $n = 2$: Links steht $1 + 3 = 4$ und rechts $2^2 = 4$. Da wir auch den Fall $n = 3$ leicht im Kopf berechnen können, ist die Formel also für $n = 1, 2, 3$ richtig. Ein Physiker wäre mit diesem Argument vielleicht schon zufrieden und würde hieraus kühn auf die Richtigkeit von (A_n) für alle n folgern. Wir nennen dies einen Induktionsschluss, weil eine allgemeine Behauptung durch Nachweis von endlich vielen Fällen aufgestellt wird. Dem Physiker bleibt freilich nichts anderes übrig: Er kann ein von ihm postuliertes Gesetz nur in endlich vielen Fällen experimentell nachweisen, obwohl es in unendlich vielen Fällen gültig sein soll. In der Mathematik muss die Behauptung (A_n) dagegen für jedes n bewiesen werden.

Bei der Überprüfung von (A_n) kann man auf bereits Berechnetes zurückgreifen:

$$(2.1) \qquad 1 + 3 + 5 = (1 + 3) + 5 = 4 + 5 = 9$$

$$1 + 3 + 5 + 7 = (1 + 3 + 5) + 7 = 9 + 7 = 16$$

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = (1 + 3 + 5 + 7) + 9 = 16 + 9 = 25$$

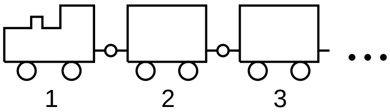
Wie wir gleich sehen werden, kann man hieraus einen vollständigen Beweis machen, es fehlt nur noch ein Schema, das diese Rechnung allgemeingültig macht.

Wir können $(A_1), (A_2), \ldots$ mit Hilfe des *Prinzips der vollständigen Induktion* beweisen. Dazu beweist man zwei Dinge:

(i) (A_1) (=Induktionsanfang oder Induktionsverankerung),

(ii) $(A_n) \Rightarrow (A_{n+1})$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (=Induktionsschritt).

Der „Beweis“ von (A_1) ist nichts anderes als dass man nachrechnet, dass (A_1) eine wahre Aussage ist, was wir bereits getan haben. Der zweite Schritt lässt sich so interpretieren: Unter der Voraussetzung, dass wir schon wissen, dass die *Induktionsvoraussetzung* (A_n) richtig ist, können wir auch die Richtigkeit von (A_{n+1}) nachweisen. Warum ist mit diesen beiden Schritten tatsächlich der Nachweis von (A_n) für jedes $n \in \mathbb{N}$ erfolgt?



Wir betrachten den unendlich langen Zug in obiger Abbildung. Die Aussage „(A_n) ist richtig“ soll in diesem Bild bedeuten „Der Waggon n fährt“. Wir nehmen zunächst an, dass die Waggons nicht miteinander gekoppelt sind. Wenn also (A_1) bewiesen ist, so fährt die Lokomotive los – allerdings allein, weil nichts aneinandergekoppelt ist. Haben wir „ $(A_1) \Rightarrow (A_2)$ “ bewiesen, so haben wir die Wahrheit von (A_2) an die Wahrheit von (A_1) gekoppelt: Mit (A_1) wahr, ist auch (A_2) wahr. Fährt die Lokomotive los, so auch Waggon 2. Im Induktionsschritt sind sogar alle

Waggons miteinder gekoppelt. Fährt nun die Lokomotive aufgrund der Induktionsverankerung los, so auch der unendlich lange Zug.

Nun können wir (A_n) beweisen. (A_1) ist ja richtig. Zum Nachweis von (A_{n+1}) dürfen wir nun (A_n) verwenden. Wir schauen (A_{n+1}) tief in die Augen und kommen dann mit dem gleichen Verfahren wie bei (2.1) auf

$$\begin{aligned}
&1 + 3 + \ldots + (2n-1) + (2(n+1)-1) \\
&= \Big(1 + 3 + \ldots + (2n-1)\Big) + (2(n+1)-1) \\
&= n^2 + (2(n+1)-1) \\
&= n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2.
\end{aligned}$$

Damit ist (A_{n+1}) bewiesen.

Anders ausgedrückt wird der modus ponens aus Abschnitt 1.1 unendlich oft angewendet. (A_1) ist die Induktionsvoraussetzung, dann wird der Induktionsschritt für $n = 1$ angewendet, also ist $(A_1) \Rightarrow (A_2)$ ebenfalls bewiesen, nach dem modus ponens daher auch (A_2). Durch fortgesetzte Anwendung des Induktionsschritts begleitet vom modus ponens erhält man den Beweis von (A_n) für alle n.

Beispiel 2.1 n Autos stehen auf einer Kreislinie. Die Autos besitzen zusammen so viel Benzin, um damit einmal um den Kreis herumzufahren. Man zeige, dass es ein Auto gibt, das den Kreis einmal umrunden kann, wenn es das Benzin der Autos, bei denen es vorbeikommt, mitnehmen darf.

Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass das Umrunden des Kreises eine Entfernungseinheit beträgt und dass man dazu eine Einheit Benzin benötigt. Das Auto i erhält t_i Benzin mit $\sum t_i = 1$.

Der Induktionsanfang $n = 1$ ist klar, weil in diesem Fall das Auto 1 $t_1 = 1$ Benzin bekommt. Sei also die Behauptung für n Autos bewiesen. Bei $n+1$ Autos überlegen wir als erstes, dass es ein Auto geben muss, das zumindest das nächste Auto erreichen kann. Da die Summe der Entfernungen zwischen den Autos 1 ist und die Summe des Benzins ebenfalls 1, muss dies für ein Auto möglich sein. Sei die Nummer dieses Autos n und das mit dem Benzin von n erreichbare Auto habe die Nummer $n + 1$. Wir geben das Benzin von $n + 1$ dem Auto n und lassen das Auto $n + 1$ weg. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es ein Auto, das die Umrundung schafft. Dieses Auto schafft die Umrundung aber auch in der unmodifizierten Situation: Wenn es bei n vorbeikommt, reicht das Benzin, um bis zum Auto $n + 1$ zu kommen und das Benzin von $n + 1$ mitzunehmen. □

2.2 Die Fibonacci-Zahlen Die *Fibonacci-Zahlen* F_n sind definiert durch die Anfangsvorgaben

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1,$$

sowie durch die *Rekursion*

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Wir bekommen die Folge $F_0, F_1, \ldots$ der Fibonacci-Zahlen, indem wir die letzte Formel sukzessive für $n = 1, 2 \ldots$ anwenden. Für $n = 1$ ergibt sich also $F_2 = F_1 + F_0 = 1 + 0 = 1$. Allgemeiner ist jede Fibonacci-Zahl die Summe ihrer beiden Vorgänger. In der Definition haben wir also ein verallgemeinertes Induktionsprinzip kennengelernt: Da jede Fibonacci-Zahl F_{n+1} von ihren beiden Vorgängern F_n, F_{n-1} abhängt, benötigen wir *zwei* „Induktionsanfänge“ F_0 und F_1. Damit sind die Fibonacci-Zahlen für alle natürlichen Zahlen definiert und lassen sich, da nur die beiden vorherigen Fibonacci-Zahlen addiert werden müssen, leicht hinschreiben:

$$F_0 = 0,\ F_1 = 1,\ F_2 = 1,\ F_3 = 2,\ F_4 = 3,\ F_5 = 5,\ F_6 = 8,\ F_7 = 13,\ F_8 = 21,\ F_9 = 34.$$

Erfunden hat die Fibonacci-Zahlen der Mathematiker Leonardo von Pisa (ca 1170-1240), der später Fibonacci genannt wurde. Mit den Fibonacci-Zahlen soll die Kaninchenaufgabe gelöst werden, also wie viele Kaninchen im Laufe einer Zeitspanne aus einem Paar entstehen. Es wird angenommen, das jedes Paar allmonatlich ein neues Paar in die Welt setzt, das wiederum nach *zwei* Monaten ein weiteres Paar produziert. Man nimmt also an, dass die neugeborenen Kaninchen nicht sofort geschlechtsreif sind. Todesfälle werden nicht berücksichtigt. Hat man im ersten Monat ein neugeborenes Paar (N), so im zweiten Monat ein geschlechtsreifes Paar (G) und im dritten Monat 2 Paare, nämlich 1N+1G. Im 4. Monat hat man 3 Paare, nämlich 1N+2G. Bezeichnet man mit F_n die Anzahl der Kaninchenpaare im Monat n, so kommen im Monat $n+1$ gerade F_{n-1} hinzu:

$$\underset{\text{Paare in } n+1}{F_{n+1}} = \underset{\text{Paare in } n}{F_n} + \underset{\text{geschlechtsreife Paare in } n}{F_{n-1}}$$

Wäre jedes neugeborene Paar sofort geschlechtsreif, so hätte man stattdessen die Rekursion $F_{n+1} = 2F_n$, was eine Verdoppelung der Paare in jedem Monat bedeuten würde. Die Berücksichtigung der Geschlechtsreife führt dagegen zu einem langsameren Wachstum der Population, nämlich

$$\frac{F_6}{F_5} = \frac{8}{5} = 1,6, \quad \frac{F_7}{F_6} = \frac{13}{8} = 1,625, \quad \frac{F_8}{F_7} = \frac{21}{13} = 1,615\ldots,$$
$$\frac{F_9}{F_8} = \frac{34}{21} = 1,619\ldots, \quad \frac{F_{10}}{F_9} = \frac{55}{34} = 1,617\ldots.$$

Das sieht recht geheimnisvoll aus: Die Quotienten scheinen um einen nicht offensichtlichen Wert zu oszillieren, der in der Nähe von $1,618$ liegt.

Nun wollen wir die verwandte Frage diskutieren, für welche positiven Zahlen a die Abschätzung

$$F_n \le a^n$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$ richtig ist. Um erst einmal die Struktur des Beweises zu verstehen, machen wir es uns einfach und beweisen die Aussagen

$$(D_n) \qquad F_n \le 2^n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

Wir wollen das Induktionsprinzip verwenden, haben aber Schwierigkeiten, weil in $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ sowohl F_n als auch F_{n-1} vorkommen. Wir zeigen daher

(i) (D_0) *und* (D_1) (= Induktionsanfang),

(ii) $(D_{n-1}), (D_n) \Rightarrow (D_{n+1})$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (= Induktionsschritt).

Wir können leicht durchprobieren, dass damit die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}_0$ bewiesen ist. (D_0) und (D_1) sind nach dem ersten Schritt richtig. Zum Beweis von (D_2) setzen wir im zweiten Schritt $n = 1$, und erhalten, da (D_0) und (D_1) richtig sind, die Behauptung (D_2). Für die größeren n geht das ganz genauso.

Der Beweis von (D_0) und (D_1) ist

$$F_0 = 0 \le 1 = 2^0, \quad F_1 = 1 \le 2 = 2^1.$$

Zum Nachweis von (D_{n+1}) dürfen wir die Induktionsvoraussetzung

$$F_n \le 2^n, \quad F_{n-1} \le 2^{n-1}$$

verwenden. Demnach gilt

$$(2.2) \qquad F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \le 2^n + 2^{n-1} \le 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}.$$

Damit ist (D_{n+1}) bewiesen.

Kommen wir nun zur Ausgangsfrage zurück, für welche $a > 0$ die Abschätzung

$$F_n \leq a^n$$

für alle n in $\mathbb{N}_0$ richtig ist. Gleichzeitig soll hier gezeigt werden, dass mit dem Prinzip der vollständigen Induktion nicht nur vermutete Aussagen bewiesen, sondern auch völlig neue Erkenntnisse hergeleitet werden können, wenn man mit dem Prinzip kreativ umgeht. Der Beweis der neuen Aussage läuft genauso wie vorher. Der Induktionsanfang $F_0 \leq a^0$ und $F_1 \leq a$ ist für jedes $a \geq 1$ richtig. Die Hauptschwierigkeit ist der Schritt (2.2), den wir ganz analog durchführen wollen:

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \leq a^n + a^{n-1} \overset{!}{\leq} a^{n+1}.$$

Das Ausrufezeichen bedeutet hier, dass wir diejenigen a herausfinden müssen, für die

$$a^n + a^{n-1} \leq a^{n+1}$$

richtig ist. Da $a \geq 1$ wegen des Induktionsanfangs, können wir hier kürzen und erhalten

$$a + 1 \leq a^2 \tag{2.3}$$

und somit

$$a \geq \Phi = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} = 1.618033\ldots,$$

was im Einklang mit den obigen Untersuchungen von F_{n+1}/F_n steht. Die Zahl Φ heißt *goldener Schnitt* und löst folgendes Problem: Gesucht ist das Verhältnis der Seitenlängen a, b eines Rechtecks mit

$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\text{lange Seite}}{\text{kurze Seite}} = \frac{\text{Summe der Seiten}}{\text{lange Seite}}.$$

Mit $\Phi = a/b$ folgt hieraus $\Phi = 1 + \Phi^{-1}$ und $\Phi^2 = \Phi + 1$, was gerade die mit (2.3) verbundene quadratische Gleichung ist.

2.3 Mächtigkeit der Potenzmenge Wir hatten die Potenzmenge $\mathcal{P}(A)$ einer Menge A definiert als die Menge aller Teilmengen von A, wobei auch $\emptyset$ und A Elemente von $\mathcal{P}(A)$ sind.

Wir wollen die Anzahl der Teilmengen der Menge $A_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ bestimmen. Dazu bietet sich vollständige Induktion über n an, allerdings müssen wir erst einmal wissen, *was* wir beweisen sollen – die Induktion sagt uns das ja nicht. Durch Probieren stellen wir zunächst eine Hypothese auf:

$$\begin{array}{lll} A_1: & \emptyset, \{1\} & 2 \\ A_2: & \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\} & 4 \\ A_3: & \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\} & 8 \end{array}$$

Die Vermutung ist also: A_n besitzt 2^n Teilmengen.

Für $n = 1$ ist die Behauptung richtig (=Induktionsanfang). Sei 2^n die Anzahl der Teilmengen von A_n (=Induktionsvoraussetzung). Die Beweisidee bei solchen kombinatorischen Problemen ist die Strukturierung der zu zählenden Objekte nach dem Motto „Teile und Herrsche“. Wir zerlegen die Teilmengen von A_{n+1} in zwei Gruppen:

$$\begin{array}{rl} \text{I}: & \text{Teilmengen, die } n+1 \text{ nicht enthalten,} \\ \text{II}: & \text{Teilmengen, die } n+1 \text{ enthalten.} \end{array}$$

Gruppe I enthält genau die Teilmengen von A_n, das sind nach Induktionsvoraussetzung 2^n. In den Teilmengen von Gruppe II können wir das Element $n+1$ weglassen und wir erhalten eine Teilmenge von A_n. Umgekehrt können wir jede Teilmenge von A_n durch Anfügen von $n+1$ zu einer Teilmenge von Gruppe II machen. Damit enthält auch Gruppe II genau 2^n Teilmengen, zusammen also $2^n + 2^n = 2^{n+1}$, wie zu beweisen war. Wir haben damit gezeigt:

Satz 2.2 *Die Anzahl der Teilmengen einer n-elementigen Menge ist 2^n.*

2.4 Permutationen und Fakultät Eine *Permutation* von $(1, 2, \ldots, n)$ ist eine Umstellung der Zahlen $1, \ldots, n$. Beispielsweise besitzt $(1, 2, 3)$ die Permutationen

$$(1,2,3),\ (1,3,2),\ (2,1,3),\ (2,3,1),\ (3,1,2),\ (3,2,1).$$

Alternativ kann man die Permutationen als bijektive Abbildungen der Menge $A_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ in sich definieren. Beispielsweise gehört zur Permutation $(2, 3, 1)$ die Abbildung mit $f(1) = 2$, $f(2) = 3$ und $f(3) = 1$. Wir stellen uns dabei vor, dass $(\cdot, \cdot, \cdot)$ aus nummerierten Kästchen besteht, in denen wir die Werte von f hineinschreiben.

Für eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ ist $n!$ (gesprochen: n Fakultät) definiert durch

$$n! = 1 \cdot 2 \cdots n.$$

Die Fakultäten wachsen sehr schnell in n,

$$3! = 6,\ 4! = 24,\ 5! = 120,\ 6! = 720, \quad 20! = 2.43\ldots \times 10^{18}.$$

Rein aus praktischen Gründen setzt man $0! = 1$.

Satz 2.3 *Die Anzahl der Permutationen von $(1, 2, \ldots, n)$ ist $n!$.*

Beweis: Man kann das durch vollständige Induktion über n beweisen. Einfacher ist die Überlegung, auf wie viele Arten man die Zahlen $1, 2, \ldots, n$ auf n nummerierte Kästchen verteilen kann. Für die Zahl 1 hat man n Möglichkeiten, für die Zahl 2 sind es $n-1$, für die letzte Zahl n verbleibt nur noch eine Möglichkeit. $\square$

2.5 Binomialkoeffizienten und binomische Formel Für $n \in \mathbb{N}_0$ sind die *Binomialkoeffizienten* folgendermaßen definiert

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \quad \text{für } 0 \le k \le n.$$

Dass all diese Werte natürliche Zahlen sind, werden wir später sehen. Wichtig sind im Folgenden die Fälle

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!\,n!} = 1, \quad \binom{n}{n} = \frac{n!}{n!\,0!} = 1. \tag{2.4}$$

Wir beweisen die technische Formel

Lemma 2.4

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}.$$

Beweis: Wir bringen die linke Seite auf den Hauptnenner,

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

$$= \frac{n!\,k}{k!\,(n-k+1)!} + \frac{n!(n-k+1)}{k!\,(n-k+1)!} = \frac{(n+1)!}{k!\,(n+1-k)!} = \binom{n+1}{k}.$$

□

Man interpretiert das Lemma durch das *Pascalsche Dreieck*:

n=0						1					
n=1					1		1				
n=2				1		2		1			
n=3			1		3		3		1		
n=4		1		4		6		4		1	
n=5	1		5		10		10		5		1

Jede neue Zeile wird rechts und links um 1 ergänzt, was den Werten $\binom{n}{0}$ und $\binom{n}{n}$ in (2.4) entspricht, die übrigen Einträge erhält man aus dem Lemma, jeder Eintrag ist die Summe der links und rechts über ihm stehenden Zahlen.

Satz 2.5 *Die Zahl der k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge ist* $\binom{n}{k}$.

Beweis: Wir zeigen dies durch vollständige Induktion über n. Für $n = 0$ ist die Behauptung richtig, denn die leere Menge enthält nur sich selbst als Teilmenge. Die Behauptung ist auch richtig für $k = 0$ und $k = n$, in beiden Fällen haben wir nur eine Teilmenge, die leere Menge bzw. die Menge selbst, was mit den Werten in (2.4) übereinstimmt. Nach dem Prinzip „Teile und Herrsche“ strukturieren wir die k-elementigen Teilmengen der Menge $A_{n+1} = \{1, 2, \ldots, n+1\}$ in zwei Gruppen:

I : k-elementige Teilmengen, die $n + 1$ nicht enthalten,

II : k-elementige Teilmengen, die $n + 1$ enthalten.

Gruppe I besteht genau aus den k-elementigen Teilmengen der Menge $A_n = \{1, 2, \ldots, n\}$, nach Induktionsvoraussetzung sind das $\binom{n}{k}$.

In den Teilmengen der Gruppe II können wir das Element $n + 1$ weglassen und erhalten eine $k - 1$-elementige Teilmenge von A_n. Umgekehrt können wir jede $k - 1$-elementige Teilmenge von A_n um das Element $n + 1$ ergänzen und erhalten eine Teilmenge von Gruppe II. Nach Induktionsvoraussetzung ist die Zahl der Teilmengen in Gruppe II gerade $\binom{n}{k-1}$. Für die Gesamtzahl der Teilmengen gilt daher mit obigem Lemma

$$\text{Gruppe I} + \text{Gruppe II} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}.$$

Damit ist der Induktionsbeweis erfolgreich abgeschlossen. □

Beispiel 2.6 Beim Lotto „6 aus 49“ ist die Wahrscheinlichkeit, alle sechs Zahlen richtig getippt zu haben, gleich der Wahrscheinlichkeit, aus der Gesamtheit der 6-elementigen Teilmengen von $\{1, 2, \ldots, 49\}$ die „richtige“ herausgefunden zu haben. Die Zahl der Möglichkeiten ist

$$\binom{49}{6} = \frac{49!}{6!\,43!} = \frac{49 \cdot (2 \cdot 4 \cdot 6) \cdot 47 \cdot 46 \cdot (3 \cdot 5 \cdot 3) \cdot 44}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 49 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 3 \cdot 44 = 13\,983\,816.$$

Die Wahrscheinlichkeit für sechs Richtige ist daher ungefähr 1 : 14 Millionen. □

Wir betrachten nun einen kommutativen Ring $(R, 0, 1, +, \cdot)$. Wir definieren Potenzen

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\text{-mal}}, \quad a^0 = 1.$$

Für $m, n \in \mathbb{N}_0$ gelten die Potenzgesetze

$$a^{m+n} = a^m \cdot a^n, \quad a^n b^n = (ab)^n, \quad (a^m)^n = a^{mn}, \tag{2.5}$$

die sich leicht durch vollständige Induktion beweisen lassen.

Satz 2.7 *Für $a, b \in R$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt die* binomische Formel

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \ldots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + b^n.$$

Beweis: Wir verwenden Induktion über n. Für $n = 0$ ist die Formel richtig wegen $a^0 = b^0 = 1$. Unter der Annahme, dass sie für n richtig ist, folgt

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)^n (a+b) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i+1} b^i + \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^{i+1}$$

Mit Umnummerierung erhalten wir für den ersten Summanden

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i+1} b^i = a^{n+1} + \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i+1} a^{n-i} b^{i+1},$$

daher

$$(a+b)^{n+1} = a^{n+1} + \sum_{i=0}^{n-1} \left(\binom{n}{i+1} + \binom{n}{i} \right) a^{n-i} b^{i+1} + b^{n+1}.$$

Die Behauptung folgt aus der Additionseigenschaft der Binomialkoeffizienten in Lemma 2.4. □

2.6 Modelle Eine konkrete Menge (mit zugehörigen ausgezeichneten Elementen, Operationen und Relationen), in der die Axiome einer mathematischen Struktur gelten, heißt *Modell* dieser Struktur.

Alles, was wir als Beispiele von Gruppen bezeichnet haben, sind Modelle der Gruppe. Modelle sind daher konkret, haben philosophisch gesprochen ein eigenes Sein in der mathematischen Welt. Dagegen ist eine mathematische Struktur i.A. abstrakt. Das Axiomensystem der Gruppe definiert gleichzeitig, was eine Gruppe ist.

In der Mathematik gibt es zwei Arten von Strukturen:

1. Strukturen mit unterschiedlichen Modellen wie Gruppen, Ringe, Körper. Diese werden durch die jeweiligen Axiome definiert, die man kennen und für die Beweise nutzen muss.

2. „Eindeutige" Strukturen, die im Wesentlichen nur ein Modell besitzen wie etwa die natürlichen Zahlen. Diese beginnen mit einer Wurzel, meist 0 oder 1 genannt, und bestehen aus den Nachfolgern der Wurzel. Abgesehen davon, dass man den Zahlen unterschiedliche Namen geben kann, ist diese Struktur immer dieselbe. Es gibt keine wirklich verschiedenen Modelle wie etwa bei den Gruppen. Weitere Strukturen dieses Typs sind die ganzen, die rationalen und die reellen Zahlen, die später eingeführt werden. Hier brauchen wir eigentlich keine Axiome, es ist legitim, sich einfach auf den Standpunkt zu stellen, dass man diese Strukturen kennt.

2.7 Die Peanoschen Axiome für die natürlichen Zahlen Die Axiome für die natürlichen Zahlen müssen so formuliert werden, dass es nur ein einziges Modell gibt – eine sportliche Herausforderung, die der Mathematiker Giuseppe Peano Ende des 19. Jahrhunderts erfolgreich angenommen hat.

In moderner Schreibweise sind die natürlichen Zahlen eine Struktur $\mathbb{N} = (N, 1, f)$ mit dem ausgezeichneten Element 1 und einer einstelligen Abbildung $f : N \to N$, die als Nachfolger interpretiert wird. Die Axiome sind dann

(P1) Für alle m, n: Wenn $f(m) = f(n)$, so gilt $m = n$,

(P2) Es gibt kein $n \in N$ mit $f(n) = 1$,

(P3) Für alle Teilmengen $M \subset N$ gilt:

$$\text{Ist } 1 \in M \text{ und folgt aus } n \in M, \text{ dass auch } f(n) \in M, \text{ so } M = N.$$

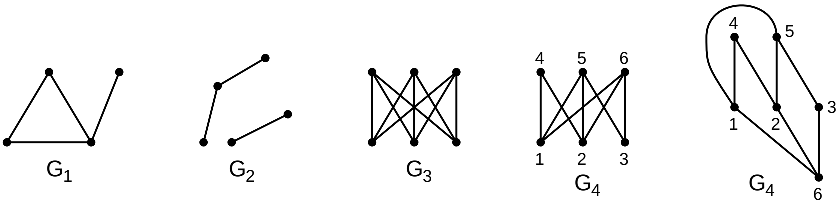
(P1) bedeutet, dass f injektiv ist, dass es also höchstens ein Urbild zu jedem $n \in N$ gibt. (P2) besagt, dass 1 nicht im Bild $f(N)$ von f liegt, insbesondere ist f nicht surjektiv. Was lässt sich daraus für die Modelle von (P1) und (P2) (ohne (P3)) schließen? Wäre N eine endliche Menge, so müsste wegen der Injektivität der Bildbereich $f(N)$ genauso viel Elemente enthalten wie der Urbildbereich N, also $N = f(N)$. Andererseits darf f nicht surjektiv sein, womit wir einen Widerspruch erhalten (siehe (1.2)). Die Axiome (P1) und (P2) zwingen die Modelle dazu, unendlich viele Elemente zu besitzen.

Um die Rolle von (P3) zu erläutern, betrachten wir folgendes Modell von (P1) und (P2). Neben den normalen natürlichen Zahlen $N_1 = \{1, 2, 3, \ldots\}$ mit 1 als ausgezeichnetem Element soll die Grundmenge noch die Elemente der Menge $N_2 = \{a, b\}$ enthalten. Der Nachfolger auf N_1 ist wie üblich als $f(n) = n+1$ definiert. Auf N_2 setzen wir $f(a) = b$ und $f(b) = a$. Damit ist $N = N_1 \cup N_2$ zusammen mit der so definierten Nachfolgerabbildung ein Modell von (P1) und (P2). Denn nach wie vor ist f injektiv und 1 liegt nicht im Bild von f. (P3) ist aber nicht erfüllt: Wir wählen $M = N_1$ und es ist jetzt in der Tat $1 \in N_1$ und aus $n \in N_1$ folgt auch $f(n) = n + 1 \in N_1$, aber N_1 stimmt nicht mit N überein.

Das Axiom (P3) der vollständigen Induktion sorgt also dafür, dass unter allen Modellen von (P1) und (P2) das minimale genommen wird: N soll nur aus $1, f(1), f(f(1)), \ldots$ bestehen.

2.8 Induktion über den rekursiven Aufbau - Eulersche Polyederformel Ein *(ungerichteter) Graph* besteht aus einer *Knotenmenge* V (engl. vertex) und einer Kantenmenge E (engl. edge). Anschaulich verbindet eine Kante zwei verschiedene Knoten, wobei es auf die geometrische Form der Kanten meist nicht ankommt.

Ein Graph heißt *zusammenhängend*, wenn je zwei Knoten durch einen Kantenzug miteinander verbunden werden können. Ein Graph heißt *planar*, wenn er auf der Ebene so gezeichnet werden kann, dass seine Kanten sich nicht überkreuzen. Ein Graph heißt *nichtleer*, wenn er mindestens einen Knoten besitzt.



G_2 ist nicht zusammenhängend, die anderen Graphen aber schon. G_4 ist planar, weil er kreuzungsfrei gezeichnet werden *kann*.

Ein zusammenhängender planarer Graph unterteilt die Ebene in f Flächen, wobei die Außenfläche mitgezählt wird.

Satz 2.8 (Eulersche Polyederformel) *Sei G ein nichtleerer, planarer, zusammenhängender Graph mit f Flächen, e Kanten und v Knoten. Dann gilt*

$$v - e + f = 2.$$

Für den Graphen G_4 erhalten wir

$$v = 6, \quad e = 8, \quad f = 4 \qquad \Rightarrow \qquad v - e + f = 2.$$

Beweis: Der Induktionsanfang ist der Graph, der nur aus einem Knoten besteht. In diesem Fall ist $v = 1$, $e = 0$ und $f = 1$, also $v - e + f = 2$.

Zum Zeichnen des Graphen benötigen wir die Operationen:

1. Setzen eines neuen Knotens und Verbinden dieses Knotens mit einem alten Knoten. In diesem Fall ändert sich v um $+1$ und e um $+1$.

2. Verbinden zweier Knoten. Hier ändert sich e um $+1$ und f um $+1$.

Wir können jeden nichtleeren, planaren, zusammenhängenden Graphen beginnend mit dem Graphen, der nur aus einem Knoten besteht, mit den beiden genannten Operationen aufbauen. Die Beziehung $v-e+f = 2$ ist für den Anfangsgraphen richtig und bleibt nach jedem Schritt bestehen. □

Für einen Polyeder mit v Knoten, e Kanten und f Seitenflächen ist die Eulersche Polyederformel ebenso richtig. Wir können nämlich einen Polyeder an einer Fläche aufschneiden und auf die Ebene klappen. Daher wird in der Polyederformel die Außenfläche mitgezählt, weil sie einer Fläche des Polyeders entspricht.

Wie aus dem Beweis der Polyederformel ersichtlich ist, hat die Formel $v - e + f = 2$ einen „statischen“ Charakter: Ändern wir einen nichtleeren, planaren, zusammenhängenden Graphen so ab, beispielsweise indem wir eine Kante weglassen, dass er immer noch nichtleer, planar und zusammenhängend ist, so bleibt die Formel erhalten. Eine solche Formel, die in einer sich dynamisch verändernden Struktur erhalten bleibt, nennt man *Invariante* der Struktur. Dazu das instruktive

Beispiel 2.9 Es gibt 11 rote, 4 blaue und und 6 gelbe Chamäleons. Treffen zwei Chamäleons verschiedener Farbe aufeinander, so nehmen sie die dritte Farbe an. Z.B. entstehen aus einem roten und einem blauen Chamäleon zwei gelbe. Ist es möglich, dass am Ende alle Chamäleons die gleiche Farbe besitzen?

Wir schreiben rote, blaue und gelbe Chamäleons als 3-tupel (r, b, g). Den beschriebenen Farbwechseln entsprechen dann die drei Operationen

$$(r, b, g) \to (r-1, b-1, g+2), \quad (r, b, g) \to (r-1, b+2, g-1), \quad (r, b, g) \to (r+2, b-1, g-1).$$

Eine Invariante dieser Farbwechsel ist zunächst die Anzahl der Chamäleons, die sich nicht ändert. Leider nutzt uns diese Invariante nichts bei der Beantwortung der Frage. Wir brauchen eine Invariante, die die Verteilung der Farben beschreibt. Versuchen wir einmal, eine Invariante zu finden, die man aus zwei Farben bestimmen kann:

$$(r, b) \to (r-1, b-1), \quad (r, b) \to (r-1, b+2), \quad (r, b) \to (r+2, b-1).$$

Die Differenz $r-b$ bleibt gleich oder verändert sich um ± 3. Bei $r = 11$, $b = 4$ erhalten wir $11-4 = 7$. Ist die geforderte Endposition $r = 21$, so ist $21 - 0 = 21$. Ist sie $g = 21$, so $0 - 0 = 0$. Man kann also die Endposition mit 21 gleichfarbigen Chamäleons nicht erreichen. $\square$