10 Folgen und Reihen

10.1 Definition und Beispiele Eine Abbildung $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ heißt *(reelle) Zahlenfolge*. Statt $a(n)$ schreiben wir kürzer a_n und bezeichnen die ganze Folge mit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oder einfach (a_n), was aber nicht darüber hinwegtäuschen soll, dass unsere Zahlenfolgen immer unendlich viele Folgenglieder besitzen. Eher als die konkreten Werte der a_n interessiert uns das Verhalten der Folge für große n.

Beispiele 10.1 (i) $a_n = n$ oder $(a_n) = (1, 2, 3, \ldots)$ ist die Folge der natürlichen Zahlen, deren Folgenglieder beliebig groß werden.

(ii) $a_n = 1/n$ oder $(a_n) = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots)$ ist eine Folge, deren Glieder der Null beliebig nahe kommen.

(iii) Die Folge $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ oder $(a_n) = (0, \frac{3}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{5}{4}, -\frac{4}{5}, \ldots)$ wechselt nach dem ersten Folgenglied das Vorzeichen, Man sagt auch: Die Folge alterniert. Für große n wechselt sie zwischen Werten, die nahe bei ± 1 liegen. □

10.2 Beschränkteit und Konvergenz von Zahlenfolgen Die Folge heißt *beschränkt*, wenn es eine Zahl M gibt mit $|a_n| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$. An sich ist der Wertebereich M_a der Folge (a_n), nämlich

$$M_a = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$$

deutlich von der Folge zu unterscheiden, weil es bei der Folge auch auf die Reihenfolge der Folgenglieder ankommt. Im Fall der Beschränktheit verhalten sich beide Begriffe gleich: Die Folge (a_n) ist genau dann beschränkt wenn der Wertebereich M_a eine beschränkte Menge ist. Da endliche Mengen reeller Zahlen immer beschränkt sind, sind auch Folgen mit nur endlich vielen Werten beschränkt. Von den Beispielfolgen in 10.1 sind die Folgen (ii) und (iii) durch 2 beschränkt. Die Folge der natürlichen Zahlen in (i) ist ein Beispiel für eine unbeschränkte Folge.

Eine Folge (a_n) ist genau dann *konvergent gegen* $a \in \mathbb{R}$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, das von ε abhängen darf, so daß für alle $n \geq N$ gilt $|a_n - a| < \varepsilon$. In diesem Fall heißt a *Grenzwert* oder *Limes* von (a_n) und wir schreiben

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \text{oder} \quad a_n \to a \ \text{ für } n \to \infty.$$

Formal kann man die Definition der Konvergenz so schreiben:

$$a_n \to a \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N \ |a_n - a| < \varepsilon.$$

Wir können uns den schwierigen Konvergenzbegriff auf vielfältige Weise verdeutlichen. Wir sagen, eine Eigenschaft trifft für *fast alle* $n \in \mathbb{N}$ zu, wenn sie für alle bis auf endlich viele n zutrifft. Die Eigenschaft, größer als 100 zu sein, trifft für fast alle natürlichen Zahlen zu, aber die Eigenschaft, geradzahlig zu sein, trifft nicht auf fast alle natürlichen Zahlen zu. Die Menge

$$B_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon) = \{x : |x - a| < \varepsilon, \quad \varepsilon > 0,$$

heißt ε-*Umgebung* der reellen Zahl a.

Die folgenden Aussagen sind zu $a_n \to a$ äquivalent.

(i) Zu jedem $m \in \mathbb{N}$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $|a_n - a| < \frac{1}{m}$ für alle $N \geq N$.

(ii) Für jedes $\varepsilon > 0$ liegen fast alle Folgenglieder in $B_\varepsilon(a)$

Beweis von (i): Aus $a_n \to a$ folgt (i). Sei also umgekehrt (i) erfüllt und $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Es gibt dann ein $m \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{m} \leq \varepsilon$. Für dieses m bekommen wir aus (i) ein N und für alle $n \geq N$ gilt $|a_n - a| < \frac{1}{m} \leq \varepsilon$.

Beweis von (ii): $a_n \in B_\varepsilon(a)$ ist gleichbedeutend mit $|a_n - a| < \varepsilon$. Gilt dies für fast allen n, so gilt es für eine endliche Menge $M \subset \mathbb{N}$ nicht. Endliche Mengen haben ein maximales Element, nennen wir es hier $N - 1$. Damit gilt $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$.

Beispiel 10.2 Für die Folge
$$a_n = \frac{2n+1}{n+1}$$
erhalten wir
$$|a_n - 2| = \left|\frac{2n+1}{n+1} - 2\right| = \left|\frac{2n+1-2(n+1)}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1}$$
Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein N mit $N > \frac{1}{\varepsilon}$. Für $n \geq N$ gilt dann $\frac{1}{n+1} < \varepsilon$. Damit liegen in jedem $B_\varepsilon(2)$ alle bis auf endlich viele Folgenglieder und $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$. □

10.3 Häufungspunkte von Folgen Ein Punkt $a \in \mathbb{R}$ heißt *Häufungspunkt* der Folge, wenn für alle $\varepsilon > 0$ in jedem $B_\varepsilon(a) = (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ unendlich viele Folgenglieder liegen.

Beispiel 10.3 Sei $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$. Wegen $a_{2n} = 1 + \frac{1}{2n}$ gilt $|a_{2n} - 1| \leq \frac{1}{2n}$. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es daher unendlich viele Folgenglieder, die in $B_\varepsilon(1)$ liegen. Damit ist 1 Häufungspunkt der Folge. Genauso erhält man mit $a_{2n-1} = -1 + \frac{1}{2n-1}$, daß auch -1 Häufungspunkt der Folge ist. Einen Grenzwert besitzt die Folge nicht, weil weder in $B_1(1)$ noch in $B_1(-1)$ alle bis auf endlich viele Folgenglieder liegen. □

Satz 10.4 (a) *Existiert der Grenzwert einer Folge, so ist er eindeutig bestimmt.*

(b) *Eine konvergente Folge ist beschränkt und besitzt genau einen Häufungspunkt, nämlich den Grenzwert der Folge.*

Beweis: (a) Angenommen, für eine Folge (a_n) gilt $\lim_{n\to\infty} = a$ und $\lim_{n\to\infty} a_n = b$ mit $a \neq b$. Für $0 < \varepsilon = |a-b|/2$ sind $B_\varepsilon(a)$ und $B_\varepsilon(b)$ disjunkt und können demnach nicht beide alle bis auf endlich viele Folgenglieder enthalten.

(b) Ist $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, so wählen wir in der Definition der Konvergenz $\varepsilon = 1$. Damit genügen alle bis auf endlich viele Folgenglieder der Abschätzung $|a_n| < |a| + 1$. Die übrigen Folgenglieder bilden eine endliche Menge. Endliche Mengen sind immer beschränkt.

Besitzt eine Folge mehr als einen Häufungspunkt, so können wir zwei Häufungspunkte mit dem Argument aus (a) duch ε-Umgebungen trennen. In jeder ε-Umgebung liegen dann unendlich viele Folgenglieder, was die Konvergenz der Folge ausschließt. □

Die Begriffe Grenzwert, Häufungspunkt und Beschränktheit hängen nicht von endlichen Abschnitten der Folge ab. Lassen wir endlich viele Folgenglieder weg oder fügen endlich viele Folgenglieder hinzu, so ändert das nichts an ihrem Grenzwert, an ihren Häufungspunkten oder an ihrer Beschränktheit.

10.4 Verträglichkeit mit den arithmetischen Operationen

Satz 10.5 *Seien $(a_n), (b_n)$ Folgen mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. Dann sind auch die Folgen $(a_n + b_n)$, $(a_n \cdot b_n)$ und, falls $b_n, b \neq 0$, auch (a_n/b_n) konvergent und es gilt*
$$a_n + b_n \;\to\; a+b, \quad a_n b_n \;\to\; ab, \quad \frac{a_n}{b_n} \;\to\; \frac{a}{b} \quad \textit{für } n \to \infty.$$

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Nach Definition der Konvergenz gibt es $N_1 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq N_1$ und $N_2 \in \mathbb{N}$ mit $|b_n - b| < \varepsilon$ für alle $n \geq N_2$. Für $n \geq \max\{N_1, N_2\}$ sind dann beide Ungleichungen erfüllt. Für diese n folgt aus der Dreiecksungleichung
$$|a_n + b_n - (a+b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < 2\varepsilon.$$
Damit liegen in jeder Umgebung $B_{2\varepsilon}(a+b)$ alle bis auf endlich viele Folgenglieder, also $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$.

Da eine konvergente Folge beschränkt ist, gilt $|b_n| \leq M$. Aus der Dreiecksungleichung folgt für $n \geq \max\{N_1, N_2\}$

$$\begin{aligned}|a_nb_n - ab| &= |a_nb_n - ab_n + ab_n - ab| \leq |a_nb_n - ab_n| + |ab_n - ab| \\ &\leq M|a_n - a| + |a|\,|b_n - b| < (M + |a|)\varepsilon,\end{aligned}$$

was $\lim_{n\to\infty} a_nb_n = ab$ impliziert.

Für die Konvergenz des Quotienten genügt es $\dfrac{1}{b_n} \to \dfrac{1}{b}$ nachzuweisen. Die Aussage folgt dann aus der Konvergenz des Produkts. Zu $\varepsilon = |b|/2$ gibt es ein N_3 mit

$$|b_n| = |b - b + b_n| \geq |b| - |b - b_n| > |b| - |b|/2 = |b|/2$$

für alle $n \geq N_3$. Für $n \geq \max\{N_1, N_2, N_3\}$ gilt

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \left|\frac{b - b_n}{b_nb}\right| \leq \frac{2}{|b|^2}|b_n - b|,$$

also $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}$. □

Beispiel 10.6 Den Grenzwert der Folge

$$a_n = \frac{2n^3 + 2n^2 + n}{n^3 + 1} = \frac{2 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n^3}}$$

können wir leicht mit diesem Satz bestimmen, weil Zähler und Nenner gegen 2 bzw. 1 konvergieren, also $a_n \to 2$. □

10.5 Grenzwerte wichtiger Folgen

Satz 10.7 (Bernoulli-Ungleichung) *Für jede reelle Zahl $a \geq -1$ und für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt*

$$(B_n) \qquad (1 + a)^n \geq 1 + na.$$

Beweis: In diesem Fall können wir die Induktion mit $n_0 = 0$ verankern, denn $(1 + a)^0 = 1$. Für $n \geq 0$ gilt unter Verwendung der Induktionsvoraussetzung (B_n)

$$\begin{aligned}(1 + a)^{n+1} &= (1 + a)^n(1 + a) \\ &\geq (1 + na)(1 + a) = 1 + na + a + na^2 \\ &\geq 1 + (n + 1)a.\end{aligned}$$

□

Nun bestimmen wir die Grenzwerte einiger prominenter Folgen. Für die geometrische Folge $a_n = q^n$ für $q \in \mathbb{R}$ gilt

$$q^n \to 0 \ \text{ falls } |q| < 1, \quad |q|^n \ \text{ ist unbeschränkt für } |q| > 1.$$

Ist nämlich $|q| = 1 + x$ mit $x > 0$, so folgt aus der Bernoulli-Ungleichung

$$|q|^n \geq 1 + nx.$$

Ist dagegen $|q| < 1$, so ist aufgrund der letzten Abschätzung $|q|^{-n} \geq 1+nx$, also $|q|^n \leq 1/(1+nx) \to 0$.

Man kann das letzte Beispiel noch verschärfen. Es gilt für beliebiges, aber fest gewähltes $m \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n\to\infty} n^m q^n = 0 \quad \text{falls } |q| < 1. \tag{10.1}$$

Anschaulich bedeutet dies, daß q^n „schneller“ gegen Null konvergiert als n^m gegen unendlich geht. Der Beweis ist mit unseren bisherigen Mitteln nur sehr aufwendig zu erbringen und wird noch zurückgestellt (siehe 10.13).

Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \tag{10.2}$$

für jede reelle Zahle $a > 0$. Für den Beweis sei zunächst $a \geq 1$. Dann ist $b_n = \sqrt[n]{a} - 1 \geq 0$ und aus der Bernoulli-Ungleichung folgt

$$a = (1 + b_n)^n \geq 1 + nb_n.$$

Damit $b_n \leq (a-1)/n \to 0$ und $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$. Für $0 < a < 1$ gilt $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^{-1}} = 1$ und nach Satz 10.4 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1/1 = 1$.

Es gilt $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. Analog zum vorigen Fall setzen wir $b_n = \sqrt[n]{n} - 1 \geq 0$. Mit der binomischen Formel folgt

$$n = (1 + b_n)^n \geq 1 + \binom{n}{2} b_n^2,$$

für $n \geq 2$ also $b_n^2 \leq 2/n \to 0$ und $b_n \to 0$. Aufgrund von Satz 10.4 gilt für fest gewähltes $m \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^m} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} \ldots \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1. \tag{10.3}$$

10.6 Konvergenz monotoner Folgen Wir bezeichnen ein Folge (a_n) als *monoton wachsend (fallend)*, wenn für alle n die Bedingung $a_n \leq a_{n+1}$ bzw. $a_n \geq a_{n+1}$ erfüllt ist. Eine Folge heißt *streng monoton wachsend* oder *fallend*, wenn für alle n die strikte Ungleichung erfüllt ist. Konvergiert eine monoton wachsende Folge (a_n) gegen a, so schreiben wir $a_n \nearrow a$, konvergiert sie monoton fallend, so $a_n \searrow a$.

Satz 10.8 *Eine beschränkte, monoton wachsende oder fallende Folge ist konvergent.*

Beweis: Sei (a_n) monoton wachsend und beschränkt. Dann ist die zugehörige Menge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ nach oben beschränkt und besitzt ein Supremum a, für das also $a_n \leq a$ gilt. Aus der Definition des Supremums folgt, daß es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt mit $a_N + \varepsilon \geq a$, denn andernfalls wäre $a - \varepsilon$ ebenfalls eine obere Schranke. Da die Folge monoton wachsend ist, gilt $0 \leq a - a_n \leq \varepsilon$ für alle $n \geq N$ und somit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. □

Beispiel 10.9 Dieser Satz wird häufig verwendet, um die Konvergenz rekursiv definierter Folgen nachzuweisen. Als ein Beispiel betrachten wir die Folge

$$a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n}, \quad a_0 = 0.$$

Durch Induktion über n zeigen wir, daß die Folge streng monoton wachsend ist. Der Induktionsanfang $a_1 > a_0$ ist richtig. Ist $a_n > a_{n-1}$, so $a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n} > \sqrt{6 + a_{n-1}} = a_n$.

Ebenfalls durch Induktion wird bewiesen, daß die Folge durch 3 nach oben beschränkt ist. Für a_0 ist das richtig. Gilt $a_n < 3$, so ist $a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n} < \sqrt{6 + 3} = 3$.

Damit haben wir gezeigt, daß die Folge konvergiert. Der Grenzwert kann mit einer Methode bestimmt werden, die in Kapitel 11 erläutert wird. □

10.7 Teilfolgen und der Satz von Bolzano-Weierstraß Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge. Für eine streng monoton wachsende Folge $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ natürlicher Zahlen heißt $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *Teilfolge* von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Eine Teilfolge besteht ebenfalls aus unendlich vielen Elementen und ist daher selber eine Folge.

Kehren wir zur Folge $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ zurück. Mit $n_k = 2k$ ist $a_{n_k} = 1 + \frac{1}{2k}$ eine Teilfolge, die gegen 1 konvergiert. Durch Auswahl einer Teilfolge können wir in diesem Beispiel einen Häufungspunkt zum Grenzwert der Teilfolge machen. Daß dies immer möglich ist, zeigt der folgende Satz.

Satz 10.10 *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit einem Häufungspunkt a. Dann existiert eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a$.*

Beweis: Wir bestimmen die Folgenglieder a_{n_k} induktiv. Seien $a_{n_1}, \dots a_{n_k}$ mit $(n_i)_{i=1,\dots,k}$ streng monoton wachsend bereits konstruiert. Zu $\varepsilon = 1/(k+1)$ liegen in $B_{1/(k+1)}(a)$ unendlich viele Folgenglieder. Aus diesen wählen wir ein beliebiges $a_{n_{k+1}}$ mit $n_{k+1} > n_k$ aus. Dann gilt $|a_{n_{k+1}} - a| < 1/(k+1)$, woraus $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a$ folgt. □

Satz 10.11 (Bolzano-Weierstraß) *Jede beschränkte Folge besitzt einen Häufungspunkt. Insbesondere enthält jede beschränkte Folge eine konvergente Teilfolge. Ferner besitzt eine beschränkte Folge einen größten und einen kleinsten Häufungspunkt.*

Beweis: Sei $a_n \in (c,d)$ für alle n. Die Menge

$$M = \{x \in \mathbb{R} : a_n > x \text{ für höchstens endlich viele } n\}$$

ist nichtleer, weil $d \in M$, und sie ist nach unten beschränkt durch c. Wir zeigen, daß $a = \inf M$ ein Häufungspunkt und zwar der größte Häufungspunkt ist. Nach Definition des Infimums ist für beliebiges $\varepsilon > 0$ $a + \varepsilon \in M$ und $a - \varepsilon \notin M$. Es gibt daher höchstens endlich viele Folgenglieder mit $a_n > a + \varepsilon$ und es gibt unendlich viele Folgenglieder mit $a_n > a - \varepsilon$. Daher ist a Häufungspunkt. Angenommen, es gibt einen weiteren Häufungspunkt $b > a$. Dann wählt man einen Punkt ξ zwischen a und b. Da oberhalb von ξ nur endlich viele Folgenglieder liegen, kann b kein Häufungspunkt sein. □

10.8 Das Cauchy-Kriterium Eine Folge (a_n) heißt *Cauchy-Folge*, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$|a_m - a_n| < \varepsilon \quad \text{für alle } m, n \geq N.$$

Wie wir gleich sehen werden, ist eine Folge genau dann konvergent, wenn sie eine Cauchy-Folge ist. Dennoch ist der Begriff der Cauchy-Folge oft nützlich, weil in ihrer Definition der Grenzwert der Folge nicht vorkommt.

Satz 10.12 *Ein Folge ist genau dann konvergent, wenn sie eine Cauchy-Folge ist.*

Beweis: Sei $a_n \to a$. Zu $\varepsilon > 0$ sei $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Für $m, n \geq N$ folgt dann aus der Dreieckungleichung

$$|a_m - a_n| = |a_m - a + a - a_n| \leq |a_m - a| + |a_n - a| < 2\varepsilon.$$

Ist umgekehrt (a_n) eine Cauchy-Folge, so wählen wir in der Definition der Cauchy-Folge $\varepsilon = 1$ und erhalten für alle n größer gleich dem zugehörigen N

$$|a_n| \leq |a_n - a_N| + |a_N| < 1 + |a_N|.$$

Die Cauchy-Folge ist damit beschränkt,

$$|a_n| \leq \max\{|a_1|, \dots, |a_{N-1}|, 1 + |a_N|\}.$$

Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß hat die Folge daher eine konvergente Teilfolge $a_{n_k} \to a$ für $k \to \infty$. Wir zeigen, dass die gesamte Folge gegen a konvergiert. Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_m - a_n| < \varepsilon$ für alle $m, n \geq N$ und wegen der Konvergenz der Teilfolge ein $n_k \geq N$ mit $|a - a_{n_k}| < \varepsilon$. Aus der Dreiecksungleichung folgt dann für alle $n \geq N$

$$|a_n - a| \leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| < 2\varepsilon$$

und damit die Konvergenz der gesamten Folge gegen a. □

10.9 Limes superior, Limes inferior und bestimmte Divergenz Wir bezeichnen den größten Häufungspunkt a^* einer beschränkten Folge (a_n) als *Limes superior* und den kleinsten Häufungspunkt a_* als *Limes inferior* der Folge und schreiben

$$a^* = \limsup_{n\to\infty} a_n, \quad a_* = \liminf_{n\to\infty} a_n.$$

Das Verhalten unbeschränkter Folgen soll im folgenden weiter präzisiert werden. Eine Folge (a_n) *divergiert bestimmt gegen unendlich*, Schreibweise $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, wenn es zu jedem $M \in \mathbb{R}$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt mit $a_n \geq M$ für alle $n \geq N$. Die bestimmte Divergenz gegen $-\infty$ ist analog definiert. Beispielsweise gilt $\lim_{n\to\infty} n = \infty$, aber $b_n = (-1)^n n$ divergiert nicht bestimmt.

Diese Begriffsbildung läßt sich auch auf Häufungspunkte übertragen. Wir sagen, daß eine Folge (a_n) den *uneigentlichen Häufungspunkt* ∞ hat, wenn eine Teilfolge von (a_n) bestimmt gegen ∞ divergiert. Dies ist äquivalent zur Bedingung: Zu jedem $M \in \mathbb{R}$ gibt es ein $n \in N$ mit $a_n \geq M$. Ferner schreiben wir in diesem Fall auch $\limsup a_n = \infty$.

10.10 Definition und Beispiele von Reihen Ein altes Problem der Analysis ist es, einer Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit reellen Zahlen a_n einen „Wert“ zuzuordnen. Ein typisches Beispiel ist die unendliche Reihe $1-1+1-1+\ldots$, die der Theologe Giordano Bruno als Modell für die Erschaffung der Welt aus dem Nichts angesehen hat: Wir erhalten $(1-1)+(1-1)+\ldots = 0$, aber auch $1-(1-1)-(1-1)-\ldots = 1$. Bruno ist später als Ketzer verbrannt worden, aber nicht deshalb.

Diese Konfusion hat sich erledigt, weil wir der Reihe die *Folge der Partialsummen* zuordnen

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Konvergiert die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen s, so nennen wir die Reihe *konvergent* mit Grenzwert s und schreiben $s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Konvergiert die Folge (s_n) nicht, so sagen wir, dass die Reihe divergiert. Im obigen Beispiel ist $(s_n) = (1, 0, 1, 0, \ldots)$ und die Reihe ist nicht konvergent.

Divergiert (s_n) bestimmt gegen unendlich, so schreiben wir $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$.

So wie eine Reihe eine Folge erzeugt, kann man einer Folge (s_n) auch eine Reihe zuordnen, nämlich

$$a_1 = s_1,\ a_2 = s_2 - s_1,\ a_3 = s_3 - s_2,\ \ldots$$

Die Folge der Partialsummen der Reihe $\sum a_n$ ist also gerade (s_n). Die Begriffe „Reihe“ und „Folge“ sind damit vollständig äquivalent. Aus Satz 10.4 erhält man insbesondere, dass die Summe zweier konvergenter Reihen wieder konvergent ist. Das Produkt zweier Reihen wird später betrachtet.

Es dürfte klar sein, dass man das Konvergenzverhalten einer Reihe nicht ändert, wenn man endlich viele Reihenglieder weglässt oder hinzufügt. Die Konvergenztheorie von Reihen der Form $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ mit $k \in \mathbb{Z}$ hängt daher nicht von k ab.

Fundamental ist die *geometrische Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$, für deren Partialsummen $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ nach der geometrischen Summenformel

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}, \quad q \neq 1$$

gilt. Daher ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \begin{cases} \frac{1}{1-q} & \text{für } |q| < 1 \\ \infty & \text{für } q \geq 1 \end{cases}$$

Eine prominentes Beispiel für eine bestimmt divergente Reihe ist die *harmonische Reihe*

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} &= 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{3} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}) + \dots \\ &\geq 1 + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} + \dots \end{aligned}$$

Damit gilt für die Folge der Partialsummen $\lim_{n\to\infty} s_n = \infty$ und die Reihe divergiert bestimmt.

Notwendig für die Konvergenz einer Reihe ist, dass die (a_n) eine Nullfolge bilden, denn die Partialsummen können höchstens dann konvergieren, wenn $|s_n - s_{n+1}| \to 0$. Das letzte Beispiel zeigt aber auch, dass diese Bedingung nicht hinreichend ist.

10.11 Alternierende Reihen Ist eine Reihe *alternierend*, haben also die Reihenglieder wechselndes Vorzeichen, so gilt:

Satz 10.13 (Leibniz-Kriterium) *Sind die Reihenglieder von der Form $a_n = (-1)^n b_n$ und ist (b_n) eine streng monoton fallende Nullfolge, so ist die Reihe $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ konvergent und für den Reihenrest gilt*

$$r_l = \sum_{n=l+1}^{\infty} a_n = \theta a_{l+1} \quad \textit{mit } 0 < \theta < 1.$$

Beweis: Wir können annehmen, dass die Reihe bei $n = 0$ beginnt. Dann ist $a_0 = b_0 > 0$ und wir erhalten für die ungeraden Partialsummen

$$s_{2n+1} = (b_0 - b_1) + (b_2 - b_3) + \dots + (b_{2n} - b_{2n+1}).$$

(s_{2n+1}) ist also monoton wachsend. Entsprechend sind die geraden Partialsummen

$$s_{2n} = b_0 - (b_1 - b_2) - \dots - (b_{2n-1} - b_{2n})$$

monoton fallend. Wegen $a_{2n+1} < 0$ gilt ferner $0 < s_{2n+1} < s_{2n} < b_0$. Nach Satz 10.6 haben die monotonen und beschränkten Folgen (s_{2n+1}) und (s_{2n}) jeweils einen Grenzwert, der wegen $|s_{2n+1} - s_{2n}| \to 0$ in beiden Fällen der gleiche sein muß. Damit ist dieser Grenzwert s auch Grenzwert der Reihe. Es gilt $0 < s < b_0 = a_0$, also $s = \theta a_0$ für $0 < \theta < 1$. Die gleiche Überlegung können wir für den Reihenrest machen, der ja wiederum eine alternierende Reihe ist. Damit ist auch die Fehlerabschätzung bewiesen. □

Der Satz ist nicht richtig, wenn (b_n) eine nichtnegative Nullfolge ist, die Monotonie ist wesentlich.

Beispiel 10.14 Leibniz hat bewiesen, dass

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots.$$

Das können wir im Moment nicht nachvollziehen, aber wir können das Ergebnis mit Hilfe der Fehlerabschätzung für den Reihenrest überprüfen. In der ersten Zeile führen wir die Partialsummen s_n auf und in der zweiten die vom Satz garantierte Abschätzung für den Reihenrest, also $|a_{n+1}|$, der exakte Wert ist $\frac{\pi}{4} = 0.785\dots$

s_n	1.00	0.666	0.866	0.723	0.834	0.734
$\lvert r_n \rvert \leq$	0.333	0.200	0.143	0.111	0.100	0.083

Zur Berechnung einer Milliarder Stellen von π ist dieses Verfahren offenbar nicht geeignet. □

10.12 Absolute Konvergenz von Reihen und Cauchy-Kriterium Nach dem Leibniz-Kriterium ist die alternierende harmonische Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

konvergent, aber sie ist nicht robust gegen eine veränderte Auswertung. Wir können ja versuchen, zunächst die Teilreihe der positiven Gliedern auszurechnen und darauf die Reihe mit den negativen Gliedern aufzuaddieren. Es gilt aber

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} &= 1 + \frac{1}{3} + (\frac{1}{5} + \frac{1}{7}) + (\frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15}) + \dots \\ &\geq 1 + \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{8} + 4 \cdot \frac{1}{16} + \dots\end{aligned}$$

und die Teilreihe ist divergent. Wir nennen eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *absolut konvergent*, wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergent ist. Zum Beispiel ist die geometrische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ absolut konvergent für alle $|q| < 1$.

Die Folge der Partialsummen einer Reihe ist nach Satz 10.8 genau dann konvergent, wenn sie eine Cauchy-Folge ist. Angewendet auf Reihen sieht das folgendermaßen aus: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq m \geq N$ gilt

$$\left| \sum_{k=m}^{n} a_k \right| < \varepsilon.$$

Man nennt diese Bedingung auch *Cauchy-Kriterium für Reihen.* Mit diesem Kriterium lässt sich leicht zeigen, dass eine absolut konvergente Reihe auch konvergent ist,

$$\left| \sum_{k=m}^{n} a_k \right| \leq \sum_{k=m}^{n} |a_k|.$$

Da die Partialsummen von $\sum |a_n|$ eine Cauchy-Folge bilden, gilt gleiches für die Partialsummen von $\sum a_n$. Die Abschätzung

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

folgt aus der analogen Abschätzung für die Partialsummen und Grenzübergang.

Ohne Beweis sei vermerkt, dass man eine absolut konvergente Reihe beliebig umordnen, also die Reihe in beliebiger Reihenfolge auswerten kann, ohne den Grenzwert zu verändern.

10.13 Kriterien für die absolute Konvergenz von Reihen

Satz 10.15 (a) Majorantenkriterium*: Ist $|a_n| \leq c_n$ mit $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergent, so ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.*

(b) Quotientenkriterium*: Sei $a_n \neq 0$. Existiert eine Zahl q mit $0 < q < 1$ und*

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq q < 1 \quad \textit{für fast alle } n,$$

so ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent. Ist dagegen

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \geq 1 \quad \textit{für fast alle } n,$$

so ist die Reihe divergent.

(c) Wurzelkriterium*: Existiert eine Zahl q mit $0 < q < 1$ und*

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq q < 1 \quad \textit{für fast alle } n,$$

so ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent. Ist dagegen

$$\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1 \quad \textit{für unendlich viele } n,$$

so ist die Reihe divergent.

Beweis: (a) Es ist klar, dass die Folge der Partialsummen der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ beschränkt bleibt, wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergiert.

(b) Da das Weglassen von endlich vielen Gliedern nichts am Konvergenzverhalten einer Reihe ändert, können wir annehmen, dass die Bedingung für alle $n \in \mathbb{N}_0$ erfüllt ist. Aus $|a_{n+1}| \leq q|a_n|$ folgt $|a_n| \leq q^n|a_0|$. Damit ist $c_n = q^n|a_0|$ wegen $0 < q < 1$ eine konvergente Majorante der Reihe. Ist $|a_{n+1}| \geq |a_n|$, so folgt entsprechend $|a_n| \geq |a_0|$ für alle n. Damit ist die Folge (a_n) keine Nullfolge und die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist nicht konvergent.

(c) Für fast alle Folgenglieder gilt $|a_n| \leq q^n$, die Behauptung folgt wieder aus der Konvergenz der geometrischen Reihe. Aus der zweiten Bedingung folgt $|a_n| \geq 1$ für unendlich viele n. Damit ist (a_n) keine Nullfolge. □

Implizit wurde hier auch das *Minorantenkriterium* verwendet: Ist $|a_n| \geq b_n \geq 0$ und die Reihe $\sum b_n$ divergent, so ist auch die Ausgangsreihe $\sum a_n$ nicht absolut konvergent.

Für die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ gilt

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1, \quad \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \quad \text{für alle } n,$$

aber die harmonische Reihe ist divergent. Sowohl im Quotienten- als auch im Wurzelkriterium ist es also ganz wesentlich, dass das $q < 1$ unabhängig von n gewählt werden kann.

Beispiele 10.16 (i) $\sum_{n=1}^{\infty} n^m q^n$ ist absolut konvergent für $m \in \mathbb{N}_0$ und $|q| < 1$. Mit (10.3) gilt $\sqrt[n]{n^m} \to 1$ für $n \to \infty$ und

$$\sqrt[n]{n^m|q|^n} = \sqrt[n]{n^m}|q| \leq (1+\varepsilon)q \quad \text{für alle } n \geq N(\varepsilon).$$

Wir wählen hier ε so klein, dass $(1+\varepsilon)|q| < 1$ und haben damit das Wurzelkriterium erfüllt. Da die Glieder einer konvergenten Reihe eine Nullfolge bilden, haben wir auch $\lim_{n\to\infty} n^m q^n = 0$ und damit (10.1) gezeigt.

(ii) Ein typisches Beispiel für die Anwendung des Quotientenkriteriums ist die Reihe $\displaystyle\sum \frac{q^n}{n!}$. Mit

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{|q|^{n+1}n!}{(n+1)!\,|q|^n} = \frac{|q|}{n+1}$$

haben wir das Quotientenkriterium für alle $q \in \mathbb{R}$ erfüllt.

(iii) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ist konvergent, aber sowohl das Wurzel- als auch das Quotientenkriterium versagen. Beide Kriterien beruhen ja auf einer Majorisierung durch die geometrische Reihe, was ein ziemlich grober Klotz ist. □