## Zusatzaufgaben

Das Zahlenpaaar hinter der Schwierigkeitsstufe gibt die zugehörige Kapitel- und Abschnittnummer an.

**1** (3,1.1) Ist $X$ ein topologischer Raum, $Y$ ein Hausdorff-Raum und $f : X \to Y$ stetig, so ist der *Graph* von $f$,

$$G(f) = \{(x, f(x) : x \in X\} \subset X \times Y,$$

abgeschlossen in $X \times Y$.

*Bemerkung:* Man vergleiche mit dem Satz vom abgeschlossenen Graphen 3.8.

**2** (2,1.1) Seien $X_i$ für eine beliebige Indexmenge $I$ topologische Räume.

a) Die Mengen $A = \times_{i \in I} A_i$ mit $A_i$ offen in $X_i$ für endlich viele $i$, $A_i = X_i$ für die anderen $i$, bilden zusammen mit der leeren Menge die Basis einer Topologie auf $\times X_i$, die *Produkttopologie* genannt wird.

b) Die Produkttopologie ist die gröbste Topologie, so daß alle Projektionen $p_k : \times X_i \to X_k$ stetig sind.

c) Sei nun speziell $I = \mathbb{N}$, $X_i = \mathbb{R}$ versehen mit der Standardtopologie. Was bedeutet $x_k \to 0$ in der Produkttoplogie ?

**3** (2,1.2) Die drei Axiome der Metrik sind redundant. Zeigen Sie, daß eine Abbildung $d : X \times X \to \mathbb{R}$ mit

(i) $d(x, y) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = y$

(ii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(z, y)$

eine Metrik auf der Menge $X$ ist.

**4** (3,1.4) Ist $X$ ein kompakter Raum und gibt es stetige reellwertige Abbildungen $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, die die Punkte in $X$ trennen, so ist $X$ metrisierbar.

*Bemerkung und Hinweis:* „Punkte trennen” bedeutet, daß es zu verschiedenen $x, y \in X$ ein $f_k$ gibt mit $f_k(x) \neq f(y)$. Man versuche, mit Hilfe der $f_k$ überhaupt eine Metrik auf $X$ anzugeben. Für den Nachweis, daß die Metrik die gleiche Topologie erzeugt, verwende man Aufgabe 1.15.

**5** (3,1.4) Sei $X$ ein vollständiger metrischer Raum und $M \subset X$. Dann sind äquivalent:

(a) $M$ ist relativ kompakt.

(b) Ist $(A_k)$ eine monoton fallende Folge nichtleerer abgeschlossener Teilmengen von $\overline{M}$, so gilt $\cap A_k \neq \emptyset$.

**6** (3,1.4) Sei $X$ ein metrischer Raum und $K_1, K_2$ seien kompakte, disjunkte Teilmengen von $X$. Dann gibt es offene Mengen $U_1 \supset K_1$, $U_2 \supset K_2$ mit $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

**7** (2,2.1) Sei $X = c_0$ und

$$U = \{x \in c_0 : \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} x(i) = 0\}.$$

a) $U$ ist abgeschlossener Unterraum von $c_0$.
b) Zu jedem $x \in X \setminus U$ gibt es kein $u \in U$ mit $\operatorname{dist}(x, U) = \|x - u\|_{l_\infty}$.

**8** (2,2.1) Sei

$$U = \{u \in l_\infty : \text{ Es gibt eine endliches } A \subset \mathbb{K} \text{ mit } u(i) \in A \text{ für alle } i \in \mathbb{N}\}.$$

Zeigen Sie: $U$ ist dichter Unterraum von $l_\infty$.

**9** (3,2.1) Beweisen Sie oder widerlegen Sie durch Gegenbeispiel: Sei $X$ ein linearer $\mathbb{K}$-Vektorraum und $L_1, L_2$ lineare Funktionale mit $\mathcal{N}(L_1) = \mathcal{N}(L_2)$. Dann gibt es ein $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ mit $L_1 = \lambda L_2$.

**10** (2,2.1) Sei $l_2(\mathbb{Z})$ der Raum der quadratsummierbaren Folgen $(x(i))_{i\in\mathbb{Z}}$ mit kanonischen Einheitsvektoren $e_k$, $k \in \mathbb{Z}$. $X_1$ sei der Abschluß von $\operatorname{span}\{e_0, e_1, \ldots\}$ und $X_2$ sei der Abschluß von

$$\operatorname{span}\{f_1, f_2, \ldots\}, \quad f_k = e_{-k} + k e_k.$$

a) $X_1 + X_2$ ist dicht in $l_2(\mathbb{Z})$.
b) $X_1 + X_2$ ist nicht abgeschlossen.
*Bemerkung:* Die Summe zweier abgeschlossener Unterräume ist also nicht notwendig abgeschlossen (vergleiche Aufgabe 43).

**11** (2,2.3) Bestimmen Sie die Norm der folgenden Funktionale $f_k \in C([0,1])'$, $k \in \mathbb{N}$:
a) $f_k(x) = \int_0^1 t^k x(t)\,dt$, b) $f_k(x) = \int_0^1 \sin k\pi t\, x(t)\,dt$.

**12** (1,2.3) Seien $X, Y$ Banach-Räume, $K \in \mathcal{L}(X, Y)$ kompakt und $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Gibt es eine Konstante $c$ mit

$$\|Tx\| \le c\|Kx\| \quad \forall x \in X,$$

so ist auch $T$ kompakt.

**13** (2,2.3) Zeigen Sie, daß die Operatoren

$$Sx(t) = tx(t), \quad Tx(t) = t\int_0^1 x(s)\,ds,$$

in $\mathcal{L}(C([0,1]))$ sind. Bestimmen Sie $\|ST\|$ und $\|TS\|$.

**14** (2,2.3) Seien $X, Y$ unendlich dimensionale Banach-Räume. Ist $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ kompakt und injektiv, so ist $T^{-1} : \mathcal{R}(T) \to X$ unbeschränkt.

**15** (2,2.3) Sei $X = C([0,1])$ und $T_g : X \to X$ der Multiplikationsoperator für $g \in X$.
a) Für welche $g$ ist $T_g$ injektiv?
b) Für welche $g$ gilt die Abschätzung

$$(*) \qquad m\|f\| \le \|T_g f\| \quad \forall f \in X.$$

c) Ist $X$ endlich dimensional, so folgt aus der Injektivität von $T \in \mathcal{L}(X)$ die Abschätzung $(*)$.

**16** (2,2.3) Zeigen Sie für $T \in \mathcal{L}(X)$ die Abschätzung $\|T^k\|_{X\to X} \le \|T\|^k_{X\to X}$ und geben Sie einen Banach-Raum $X$ und ein $T \in \mathcal{L}(X)$ an mit

$$\|T^{k+l}\|_{X\to X} < \|T^k\|_{X\to X}\|T^l\|_{X\to X} \quad \forall k,l \in \mathbb{N}.$$

**17** (2,2.3) Sei $X$ eine Banach-Raum. Es gibt keine $S, T \in \mathcal{L}(X)$ mit $ST - TS = Id$.
*Hinweis:* Man zeige zunächst $TS^n - S^nT = nS^{n-1}$.

**18** (1,2.3) Sei $X$ ein Banach-Raum und $f \in X' \setminus \{0\}$. Sei

$$M_f = \{x \in X : f(x) = 1\},$$

also $M_f = x_0 + \mathcal{N}(f)$ mit $f(x_0) = 1$. Zeigen Sie

$$\|f\|_{X'} = \frac{1}{\mathrm{dist}\,(0, M_f)}.$$

**19** (3,2.4) Sei $X = X_1 \oplus X_2$ ein Hilbert-Raum mit Skalarprodukt $a(\cdot,\cdot)$ und Norm $\|\cdot\|$. In $(X_1, X_2)$ gilt eine *verschärfte Cauchy-Ungleichung*, wenn es eine Konstante $\gamma$, $0 \le \gamma < 1$, gibt mit

$$|a(x_1,x_2)| \le \gamma\|x_1\|\,\|x_2\| \quad \forall x_1 \in X_1,\ \forall x_2 \in X_2.$$

a) Ist $X$ endlich dimensional, so ist die verschärfte Cauchy-Ungleichung erfüllt.
b) Sei $f \in X'$. Für die Lösung von

$$a(x,y) = f(y) \quad \forall y \in X$$

betrachten wir folgendes Iterationsverfahren: Sei $x^0 \in X$ beliebig. Sei $x^i \in X$ bereits konstruiert. Definiere

$$(*) \qquad w_1 \in X_1 : \quad a(x^i + w_1, y_1) = f(y_1) \quad \forall y_1 \in X_1$$

$$x^{i+1/2} = x^i + w_1$$

$$(**) \qquad w_2 \in X_2 : \quad a(x^{i+1/2} + w_2, y_2) = f(y_2) \quad \forall v_2 \in X_2$$

$$x^{i+1} = x^{i+1/2} + w_2.$$

Zur Untersuchung solcher linearer Verfahren betrachtet man besser die Fehler $e^i = x - x^i$, $e^{i+1/2} = x - x^{i+1/2}$. Diese erfüllen $(*), (**)$ jeweils mit $f = 0$. Wir können daher gleich $f = 0$ annehmen. Mit $P_i w$ bezeichnen wir die Projektion von $w$ in $X_i$, also

$$a(P_i w, y_i) = a(w, y_i) \quad \forall y_i \in X_i.$$

Im Falle $f = 0$ läßt sich das Verfahren auch kurz schreiben

$$x_{i+1/2} = x_i - P_1 x_i,$$

$$x_{i+1} = x_{i+1/2} - P_2 x_{i+1/2}.$$

Zeigen Sie, daß nach einem Schritt die Abschätzung

$$\|x^{i+1}\| \leq \gamma^2 \|x^i\|, \quad i \geq 1,$$

mit dem $\gamma$ aus a) gilt.

*Bemerkung und Hinweis:* Mit $\alpha = \not\measuredangle (x_1, x_2)$ gilt allgemein

$$|a(x_1, x_2)| = \cos\alpha \|x_1\| \, \|x_2\|.$$

a) läßt sich also so interpretieren, daß je zwei Vektorem $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X$ einen Winkel bilden, der durch $\gamma$ gegeben ist. Das Verfahren in b) konvergiert umso besser, je größer der Winkel zwischen den beiden Räumen ist. Zur Lösung von b) nehme man zunächst an, daß $X_1, X_2$ eindimensional sind und mache sich an einer Skizze klar, welchen Winkel $x^i, x^{i+1/2}$ bilden.

**20** (3,2.4) Sei $X$ ein reeller Banach-Raum, in dem die Parallelogrammgleichung

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

gilt. Dann ist durch

$$(x, y) = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)$$

ein inneres Produkt definiert, dessen Norm mit $\|\cdot\|$ übereinstimmt.

*Hinweis:* Man beweise zuerst $(x, z) + (y, z) = 2((x+y)/2, z)$.

**21** (2,2.6) Die Funktion $x(t) = |\ln(t/2)|^{-1}$ liegt in $C([0,1])$, aber in keinem $C^\alpha(0,1)$, $0 < \alpha < 1$.

**22** (1,3.1) Der Raum der Polynome ist mager in $C([0,1])$.

**23** (3.1) Sei $X$ ein Banach-Raum und $M \subset X$. $x \in M$ heißt *algebraisch-innerer Punkt* von $M$, wenn es zu jedem $y \in X$ ein $\varepsilon > 0$ gibt mit $x + \varepsilon y \in M$. Die Menge der algebraisch-inneren Punkte wird mit $M^a$ bezeichnet.

a) (1) $\operatorname{int} M \subset M^a$.

b) (3) Ist $M$ abgeschlossen und konvex, so gilt $\operatorname{int} M = M^a$.

c) (1) Geben Sie ein Beispiel für einen Banach-Raum $X$ und eine Teilmenge $M$ mit $\operatorname{int} M \neq M^a$.

*Hinweis:* Bei b) verwende man den Satz von Baire. Bei c) braucht man nicht in die Ferne zu schweifen und kann beispielsweise $X = \mathbb{R}$ setzen.

**24** (3,3.1) Seien $X, Y$ Banach-Räume, $b : X \times Y \to \mathbb{K}$ sei bilinear und in jeder Komponente stetig, also $b(\cdot, y) \in X'$ und $b(x, \cdot) \in Y'$ für alle $y \in Y$ beziehungsweise $x \in X$. Dann ist $b(\cdot, \cdot)$ auf $X \times Y$ stetig.

**25** (2,3.2) Seien $X, Y$ Banach-Räume und $T : X \to Y$ linear. $T$ ist genau dann beschränkt, wenn die Bedingung

$$x_k \to 0, \quad Tx_k \to y \quad \Rightarrow \quad y = 0$$

erfüllt ist.

**26** (2,3.2) Der Vektorraum $X$ sei vollständig bezüglich der Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$. Gilt dann $\|x\|_1 \leq c\|x\|_2$ für alle $x \in X$, so sind die beiden Normen äquivalent, es gilt also auch $\|x\|_2 \leq c\|x\|_1$ für alle $x \in X$.

**27** (3.5) In dieser Aufgabe betrachten wir Folgen der Form $(x(i,j))_{i,j \in \mathbb{N}}$. $l_1$ ist der Raum solcher Folgen mit Norm

$$\|x\|_{l_1} = \sum_{i,j} |x(i,j)|.$$

Entsprechend ist $c_0$ der Raum der Folgen mit

$$x(i,j) \to 0 \quad \text{für } i,j \to \infty$$

versehen mit der Supremumsnorm $\|x\|_{l_\infty} = \sup |x(i,j)|$.

Sei $M$ der Unterraum von $l_1$ der Folgen $x$ mit

$$ix(i,1) = \sum_{j=2}^{\infty} x(i,j), \quad i \in \mathbb{N}.$$

a) (1) $l_1 \cong (c_0)'$.

b) (1) $M$ ist abgeschlossener Unterraum von $l_1$.

c) (3) $M$ ist dicht in $l_1$ bezüglich der schwachen$*$ Topologie von $l_1$, die durch a) gegeben ist.

d) (3) Sei $B$ die abgeschlossene Einheitskugel von $l_1$. Zeigen Sie, daß im Gegensatz zu c) der Abschluß von $M \cap B$ bezüglich der schwachen$*$ Topologie von $l_1$ keine offene Kugel enthält.

**28** (2,3.7) Sei $X$ ein reflexiver Banach-Raum und $U$ ein abgeschlossener Unterraum von $X$. Zu jedem $x \in X$ gibt es ein $u \in U$ mit $\operatorname{dist}(x, U) = \|x - u\|$.

*Bemerkung:* Man vergleiche mit Aufgabe 7.

**29** (2,3.7) Sei $X$ ein reflexiver Banach-Raum, $K \subset X$ abgeschlossen, konvex und beschränkt, $f : K \to \mathbb{R}$ stetig und *strikt konvex*, das ist

$$f(tx + (1-t)y) < tf(x) + (1-t)f(y) \quad \forall x \neq y,\ x, y \in K,\ \forall t \in (0,1).$$

Dann besitzt das Problem $f(x) \to \text{Min}$ in $K$ eine eindeutige Lösung.

**30** (2,4.2) Es gilt

$$\frac{|\ln t|^\alpha}{t^{1/p}} \in L^p(0, e^{-1}) \;\Leftrightarrow\; \alpha p < -1.$$

**31** (3,4.2) Sei $\Omega$ ein Gebiet und $v \in L^{pq/(p-q)}(\Omega)$ für $1 \leq q \leq p < \infty$. Zeigen Sie, daß der Operator $Tu(x) = v(x)u(x)$ die Abbildungseigenschaft $T : L^p(\Omega) \to L^q(\Omega)$ besitzt und bestimmen Sie seine Norm.

**32** (4.2) Für $0 < p < 1$ (!) sei

$$L^p = \{f : (0,1) \to \mathbb{R} \text{ meßbar und } |f|^p \text{ integrierbar}\}.$$

a) (3) Der Ausdruck

$$d(u,v) = \int_0^1 |u - v|^p \, dx$$

existiert für $u, v \in L^p(\Omega)$ und ist eine Metrik auf $L^p$.

b) (4) Ist $A \subset L^p$ nichtleer, offen und konvex, so $A = L^p$.

c) (2) Für jedes lineare Funktional $f$ eines Vektorraums sind die Mengen $f^{-1}(B_r(0))$ konvex.

d) (1) Bestimmen Sie den Raum $(L^p)'$ der stetigen linearen Funktionale.

*Hinweis zu b):* Man kann $0 \in A$ annehmen. Da $A$ offen, gilt $B_r(0) \subset A$ für genügend kleines $r > 0$.

**33** (3,4.3) Sei $1 \leq p < \infty$. Im folgenden wird $u \in L^p(0,1)$ durch Null auf ganz $\mathbb{R}$ fortgesetzt. Dann ist für $h > 0$ die *Steklov-Mittelung*

$$u_h(x) = \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} u(\xi) \, d\xi$$

definiert. Zeigen Sie

$$\|u - u_h\|_{p;\mathbb{R}} \;\to\; 0.$$

*Bemerkung und Hinweis:* Die Steklov-Mittelung wird manchmal an Stelle des Mollifiers verwendet, sie ist nicht unendlich oft differenzierbar. Beim Beweis kann man analog zum Mollifier vorgehen.

**34** (3,5.3) Sei $n = 1$ und $\Omega = (0,1)$. Auf dem reellwertigen Sobolev-Raum $H^{1,2}$ betrachten wir das Problem

$$F(u) = \int_0^1 \{u^2 + \min\left\{(u'-1)^2, (u'+1)^2\right\} dx \;\to\; \text{Min.}$$

a) $F : H^{1,2} \to \mathbb{R}$ ist stetig.

b) Es gilt $\inf F = 0$, aber es gibt kein $u \in H^{1,2}$ mit $F(u) = 0$. Warum widerspricht dies nicht Satz 3.36?

**35** (3,5.4) Sei $1 \leq p < \infty$. Sind $u, v \in H^{1,p}$, so sind auch $\max\{u,v\}$, $\min\{u,v\} \in H^{1,p}$.

**36** (3,6.6) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und $u : \Omega \to \mathbb{R}^n$. Sei $\underline{D}u = \frac{1}{2}(Du + Du^T)$ der symmetrische Anteil von $Du$. Zeigen Sie die Identität

$$2\int_\Omega \underline{D}u \cdot \underline{D}u \, dx = \int_\Omega |Du|^2 dx + \int_\Omega |\operatorname{div} u|^2 dx \quad \forall u \in H_0^{1,2}(\Omega)^n,$$

wobei $\operatorname{div} u = \sum_{i=1}^n D_i u_i$ den *Divergenzoperator* bezeichnet.

**37** (3,7.5) a) Sei $\Omega = \{(x_1, x_2) : x_1 \in \mathbb{R}, \quad x_2 > 0\}$ die obere Halbebene. Man bestimme eine beschränkte Lösung $u \in C^2(\Omega)$ von

$$-\Delta u = 0 \text{ in } \Omega, \quad u(x_1, 0) = 0 \text{ für } x_1 > 0, \quad u(x_1, 0) = \pi \text{ für } x_1 < 0,$$

die mit Ausnahme des Nullpunkts die Randbedingung stetig annimmt.

b) Sei $\Omega$ ein beschränktes ebenes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^\infty$. Die Randfunktion $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ sei unendlich oft differenzierbar in $\partial\Omega \setminus \{x_0\}$. In $x_0$ liege eine einfache Sprungstelle von $g$ vor (man kann der Einfachheit halber annehmen, daß der Rand in Umgebung von $x_0$ eine gerade Linie ist). Man zeige: Es gibt eine eindeutig bestimmte Lösung $u \in C^2(\Omega)$ von

$$-\Delta u = 0 \text{ in } \Omega, \quad u = g \text{ auf } \partial\Omega,$$

wobei $u = g$ außerhalb von $x_0$ stetig angenommen wird.

*Hinweis:* Für a) verwende man Polarkoordinaten, in b) nehme man die Lösung aus a), um die Singularität von $g$ zu behandeln.

**38** (3,7.7) Eindimensionale Randwertprobleme auf $\Omega = (0,1)$ approximiert man durch stetige, auf einer Unterteilung von $(0,1)$ stückweise lineare Funktionen. Sei $\Lambda = [0,h] \subset \mathbb{R}$ das eindimensionale Element, $I_h u$ die lineare Interpolierende einer Funktion $u \in C^0(\Lambda)$.

a) Beweisen Sie die Abschätzung

$$(*) \qquad \|u - I_h u\|_{\infty;\Lambda} \leq ch^2 \|u''\|_{\infty;\Lambda} \quad \forall u \in C^2(\Lambda)$$

und bestimmen Sie das optimale $c$ mit dem zugehörigen $u$.

b) Zeigen Sie, daß die analoge Abschätzung

$$\|u - I_h u\|_{\infty;\Lambda} \leq ch \|u'\|_{\infty;\Lambda} \quad \forall u \in C^1(\Lambda)$$

richtig ist, aber die optimale Konstante $c$ für kein $u \in C^1(\Lambda)$ angenommen wird.

**39** (2,8.3) Sei $k \in \mathbb{N}$ und $P_k : l_2 \to l_2$ die Projektion

$$P_k x(i) = \begin{cases} x(i) & \text{für } i = 1, \dots, k \\ 0 & \text{für } i > k \end{cases} .$$

Dann ist $P_k$ kompakt mit $\|P_k - Id\|_{l_2 \to l_2} \to 0$. Nach Satz 8.6 ist dann auch $Id : l_2 \to l_2$ kompakt. Wo steckt der Fehler ?

**40** (3,8.4) Seien $X, Y$ Banach-Räume, $X$ sei reflexiv. $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ ist genau dann kompakt, wenn

$$x_k \rightharpoonup x \text{ in } X \quad \Rightarrow \quad Tx_k \to Tx \text{ in } Y.$$

**41** (2,8.5) Sei $X$ ein Banach-Raum und $U$ ein abgeschlossener Unterraum von $X$.

a) Die Restklassenabbildung $x \mapsto [x]$ bildet die offene Einheitskugel von $X$ surjektiv auf die offene Einheitskugel von $X/U$ ab.

b) Die Restklassenabbildung ist nicht immer surjektiv, wenn man in a) jeweils die abgeschlossene Einheitskugel betrachtet.

*Hinweis:* Aufgabe 7.

**42** (2,8.5) Charakterisieren Sie für die folgenden reellwertigen Banach-Räume $X$ und Unterräume $U \subset X$ den Quotientenraum $X/U$ und die Quotientennorm $\| \cdot \|_{X/U}$.

a) $X = c(\mathbb{N})$ und $U = c_0(\mathbb{N})$ ($c(\mathbb{N})$ ist in Aufgabe 2.16 definiert).

b) $X = C([0, 1])$ und

$$U = \{x \in C([0, 1]) : x(\frac{1}{i}) = 0 \text{ für alle } i \in \mathbb{N}\}.$$

**43** (3,8.5) Sind $U, F$ abgeschlossene Unterräume eines Banach-Raums $X$ und ist $F$ endlich dimensional, so ist $U + F$ abgeschlossen.

*Hinweis:* Man verwende die Quotientenabbildung $\pi : X \to X/U$, $x \mapsto [x]$, und betrachte $\pi(F)$.

**44** (3,8.6) Sei $X = U \oplus V$ ein Banach-Raum. Für jedes $x \in X$ gibt es dann eine eindeutige Zerlegung $x = u + v$. Wir definieren daher die *Projektion* $P : X \to V$ *längs* $U$ durch $Px = v$. Offenbar ist $P$ linear und wegen $P^2 = P$ tatsächlich eine Projektion. Beweisen Sie:

$$U, V \text{ sind abgeschlossen} \quad \Leftrightarrow \quad P \text{ ist stetig.}$$

*Hinweis:* Für die Richtung „$\Rightarrow$" verwenden Sie den Satz vom abgeschlossenen Graphen.

**45** (3,8.6) Seien $X, Y, Z$ Banach-Räume und $K \in \mathcal{L}(X, Y)$ kompakt sowie $T \in \mathcal{L}(Y, Z)$ injektiv. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $c(\varepsilon)$ mit

$$\|Kx\|_Y \le \varepsilon \|x\|_X + c(\varepsilon) \|TKx\|_Z.$$

**46** (3,8.8) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet. Für $K \in C^0(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega})$ sei

$$Tu(x) = \int_\Omega K(x,y)u(y)\,dy$$

der zugehörige Integraloperator.
a) $T : C^0(\overline{\Omega}) \to C^0(\overline{\Omega})$ ist stetig mit

$$\|T\| = \sup_{x\in\Omega} \int_\Omega |K(x,y)|\,dy.$$

b) $T : C^0(\overline{\Omega}) \to C^0(\overline{\Omega})$ ist kompakt.

**47** (2,9.1) Impliziert eine der Beziehungen

$$\phi T = 0, \quad T\phi = 0$$

die andere?

**48** (3,9.1) Sei $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ und $n \in \mathbb{N}$. Es gibt Zahlen $a_0(\phi), \ldots, a_{n-1}(\phi)$ sowie eine beschränkte Funktion $\psi$ mit

$$\int_{x<\varepsilon} \frac{\phi(x)}{x^n}\,dx = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_k(\phi)}{\varepsilon^k} + a_0(\phi)\ln\varepsilon + \psi(\varepsilon).$$

**49** (3,9.1) Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ mit $f \geq 0$ und $\int f\,dx = 1$. Dann gilt

$$f_\lambda(x) = \lambda^{-n} f(\frac{x}{\lambda}) \overset{\mathcal{D}'}{\to} \delta_0, \quad \lambda \to 0,$$

wobei $\delta_0(\phi) = \phi(0)$ die Dirac-Distribution ist.

**50** (9.3) In dieser Aufgabe weisen wir für die Heaviside-Funktion $H$ nach, daß

$$\mathcal{F}H(\xi) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} Hw\frac{1}{\xi} + \frac{1}{2}\delta_0$$

a) (2) Zeigen Sie, daß $H(x)\mathrm{e}^{-ax} \in L^1$ für $a > 0$ und $H(x)\mathrm{e}^{-ax} \to H(x)$ in $\mathcal{S}'$ für $a \searrow 0$.
b) (2) Bestimmen Sie die Fourier-Transformation von $H(x)\mathrm{e}^{-ax}$.
c) (3) Führen Sie in b) den Grenzübergang $a \searrow 0$ durch, der wegen a) $\mathcal{F}H$ liefert.
*Hinweis*: Verwenden Sie

$$\frac{1}{a + 2\pi\mathrm{i}\xi} = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} D_\xi \ln(a + 2\pi\mathrm{i}\xi), \quad a > 0,$$

sowie für den komplexen Logarithmus die Formel ($z = x + \mathrm{i}y$)

$$\ln z = \ln|z| + \mathrm{i}\arctan\frac{y}{x}, \quad x > 0.$$

## Lösungen

**1** Sei $A$ das Komplement von $G(f)$ in $X \times Y$. Sei $(x_0, y_0) \in A$. Dann ist $y_0 \neq f(x_0)$. Nach dem Trennungsaxiom besitzen $y_0$ und $f(x_0)$ disjunkte Umgebungen $V$ und $W$ in $Y$. Da $f$ stetig ist, besitzt $x_0$ eine Umgebung $U$ mit $f(U) \subset W$. Die Umgebung $U \times V$ von $(x_0, y_0)$ liegt deshalb in $A$. Damit ist $A$ offen.

**2** a) Es gilt

$$(U_1 \times U_2) \cap (V_1 \times V_2) = (U_1 \cap V_1) \times (U_2 \cap V_2),$$

daher sind endliche Durchschnitte von der gleichen Form wie $A$.

b) $p_k$ stetig bedeutet, daß Mengen der Form $A = \times A_i$ mit $A_k$ offen in $X_k$ und $A_i = X_i$ für $i \neq k$ offen in der Topologie von $\times X_i$ sind. Diese Subbasis erzeugt gerade die angegebene Basis.

c) $x_k \to 0$ bedeutet punktweise Konvergenz, $x_k(i) \to 0$ für alle $i$.

**3** Für $y = x$ folgt aus (ii) und (i), daß $d(y,z) \leq d(z,y)$, also auch die Symmetrie $d(y,z) = d(z,y)$. Aus (ii) folgt auch

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) \leq d(x,z) + 2d(y,z),$$

daher $d(y,z) \geq 0$.

**4** Wir können die $f_k$ mit einer positiven reellen Zahl multiplizieren und damit $|f_k| \leq 1$ in $X$ erreichen. Dann ist

$$d(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} |f_k(x) - f_k(y)|$$

eine Metrik auf $X$, weil die $f_k$ die Punkte in $X$ trennen. Da die $f_k$ stetig sind und die Reihe gleichmäßig konvergiert, ist $d$ stetig auf $X \times X$. Insbesondere sind die Kugeln $B_r(x)$ offen. Damit ist die von der Metrik erzeugte Topologie gröber als die Originaltopologie. Die Behauptung folgt aus Aufgabe 1.15.

**5** (a)$\Rightarrow$(b): Angenommen, $(A_k)$ ist eine Folge wie in b), aber mit $\cap A_k = \emptyset$. Dann sind die Mengen $U_k = X \setminus A_k$ offen in $X$ und überdecken $\overline{M}$. Nach Voraussetzung ist $\overline{M}$ kompakt, also enthält $\{U_k\}$ eine endliche Teilüberdeckung, sagen wir $U_{k_1}, \ldots, U_{k_m}$. Dann gilt

$$A_{k_m} = \cap_{j=1}^{m} A_{k_j} = X \setminus \cup_{j=1}^{m} U_{k_j} \subset X \setminus \overline{M}$$

im Widerspruch zu $A_{k_m} \subset \overline{M}$.

b)$\Rightarrow$(a): Sei $(x_k)$ eine Folge in $M$. Setze $R_k = \{x_k, x_{k+1}, \ldots\}$ und $A_k = \overline{R}_k$. Dann ist $(A_k)$ eine monoton fallende Folge nichtleerer abgeschlossener Mengen in $\overline{M}$ und es gibt nach Voraussetzung ein $x \in \cap A_k$. Zu jedem $l \in \mathbb{N}$ gibt es daher ein $x_{k_l} \in R_{k_l}$ mit $d(x, x_{k_l}) \leq 1/l$. Damit ist $(x_{k_l})$ eine konvergente Teilfolge.

**6** $d(x,y)$ ist stetig und nimmt auf der kompakten Menge $K_1 \times K_2$ das Minimum an, also

$$\inf_{x \in K_1,\, y \in K_2} d(x,y) = r > 0.$$

Die gesuchten offenen Mengen sind dann

$$U_1 = \cup_{x \in K_1} B_{r/2}(x), \quad U_2 = \cup_{y \in K_2} B_{r/2}(y).$$

**7** $U$ ist natürlich ein linearer Raum. Ist $(x_k)$ eine Folge in $U$ mit $x_k \to x$ in $l_\infty$, so

$$\Big| \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} x(i) \Big| = \Big| \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} (x(i) - x_k(i)) \Big| \le \|x - x_k\|_{l_\infty}.$$

Daher $x \in U$.
b) (Skizze) Sei $x \in X \setminus U$. Da $x \in c_0$, wird $\|x\|_{l_\infty}$ angenommen, sagen wir $|x(1)| = \ldots = |x(k)| = \|x\|_{l_\infty}$. Wir konstruieren ein $u \in U$ mit $\|x - u\|_{l_\infty} < \|x\|_{l_\infty}$, indem $u(i)$ mit $|x(i) - u(i)| < |x(i)|$ gewählt wird. Für genügend großes $l$ setzen wir $u(l) = -2^l \sum_{i=1}^{k} 2^{-i} u(i)$, die anderen Komponenten von $u$ seien 0. Für genügend kleines $|u(i)|$ wird auf diese Weise $\|x - u\|_{l_\infty} < \|x\|_{l_\infty}$ erreicht. Dieses Argument gilt nun für *jedes* $x \in X \setminus U$, daher wird $\operatorname{dist}(x, U)$ nicht angenommen.

**8** $U$ ist Unterraum, denn Summe und skalare Vielfache von Elementen von $U$ liegen wieder in $U$. Sei $x \in l_\infty$ mit $\|x\|_{l_\infty} \le M$. Zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ gibt es ein endliches $A \subset B_M(0) \subset \mathbb{K}$, so daß die Kugeln mit Mittelpunkt $a_k \in A$ und Radius $\varepsilon$ die Kugel $B_M(0)$ überdecken. Daher gibt es ein $u \in U$ mit Werten in $A$ mit $\|x - u\|_{l_\infty} \le \varepsilon$.

**9** Die Behauptung ist richtig. Denn wenn sie falsch wäre, so gäbe es linear unabhängige Vektoren $x, y \notin \mathcal{N}(L_1)$ mit

$$L_1 x = \lambda L_2 x, \quad L_1 y = \mu L_2 y$$

mit $\lambda, \mu \neq 0, \lambda \neq \mu$. Durch Skalarmultiplikation kann erreicht werden, daß zusätzlich $L_1 x = L_1 y = 1$ gilt. Daraus folgt aber $L_2(\lambda x - \mu y) = 0$, jedoch $L_1(\lambda x - \mu y) = \lambda - \mu \neq 0$. Widerspruch!

**10** a) $X_1 + X_2$ enthält die endlichen Folgen.
b) $x = \sum_{i=1}^{\infty} i^{-1} e_{-i}$ ist in $l_2(\mathbb{Z})$, aber offenbar nicht in $X_1 + X_2$. Wegen a) kann $X_1 + X_2$ nicht abgeschlossen sein.

**11** a) Aus einer einfachen Abschätzung folgt

$$|f_k(x)| \le \|x\|_\infty \int_0^1 t^k \, dt = \frac{1}{1+k} \|x\|_\infty.$$

Die Funktion $x = 1$ beweist, daß $\|f_k\|_{C'} = 1/(k+1)$.
b) Analog zu a) folgt

$$|f_k(x)| \le \|x\|_\infty \int_0^1 |\sin k\pi t|\, dt.$$

In diesem Fall wird die Norm für kein $x \in C([0,1])$ angenommen. Es läßt sich leicht eine Folge stetiger Funktionen konstruieren, die punktweise gegen $\operatorname{sign}(k\pi t)$ konvergiert, daher $\|f_k\|_{C'} = 2/\pi$.

**12** Ist $(x_k)$ eine beschränkte Folge, so gibt es eine Teilfolge $(x_{k_l})$ mit $Kx_{k_l} \to Kx$. Aufgrund der Bedingung folgt dann, daß auch $Tx_{k_l} \to Tx$.

**13** Aus

$$STx(t) = t^2 \int_0^1 x(s)\, ds, \quad TSx(t) = t \int_0^1 sx(s)\, ds$$

erhalten wir durch eine einfache Abschätzung und der speziellen Wahl $x(t) = 1$

$$\|ST\| = 1, \quad \|TS\| = \frac{1}{2}.$$

**14** Wäre $T^{-1}$ beschränkt, so wäre $Id_X = T^{-1}T$ nach Lemma 2.19 kompakt und $X$ demnach endlich dimensional.

**15** a) Es gilt

$$T_g f_1 = T_g f_2 \quad \Leftrightarrow \quad g(f_1 - f_2) = 0.$$

Hieraus folgt $f_1 = f_2$ genau dann, wenn $\mathcal{N}(g)$ keinen inneren Punkte besitzt.

b) Besitzt $g$ eine Nullstelle, so wird $(*)$ durch stetige Funktionen mit Träger in einer kleinen Umgebung dieser Nullstelle widerlegt.

c) In diesem Fall folgt aus der Injektivität von $T$ auch die Existenz der Inversen Abbildung $T^{-1}$. $(*)$ erhält man aus $\|T^{-1}y\| \le \|T^{-1}\|\,\|y\|$, indem man $y$ durch $Tx$ ersetzt.

**16** Der erste Teil folgt aus $\|ST\| \le \|S\|\,\|T\|$ und Induktion. Als Beispiel kann man $X = l_\infty$ und

$$Tx(i) = \frac{1}{i+1} x(i+1), \quad i \in \mathbb{N},$$

nehmen mit $\|T^k\| = 1/(k+1)!$.

**17** Beweis durch Induktion über $n$. Aus $TS^{n-1} - S^{n-1}T = (n-1)S^{n-2}$ folgt

$$TS^n - S^{n-1}TS = (n-1)S^{n-1},$$

daher

$$TS^n - S^nT = nS^{n-1}.$$

Hieraus erhalten wir $n\|S^{n-1}\| \le 2\|S\|\,\|T\|\,\|S^{n-1}\|$, also $\frac{n}{2} \le \|S\|\,\|T\|$ im Widerspruch zu $S, T \in \mathcal{L}(X)$.

**18** Es gilt

$$\|f\|_{X'} = \sup \frac{f(x)}{\|x\|} = \frac{1}{\inf \frac{\|x\|}{f(x)}}$$

$$= \frac{1}{\inf\{\|x\| : f(x) = 1\}} = \frac{1}{\operatorname{dist}(0, M_f)}.$$

**19** a) Für $x, y \neq 0$ gilt in der Cauchy-Ungleichung

$$|a(x,y)| \leq \|x\| \, \|y\|$$

genau dann Gleichheit, wenn $x$ und $y$ kollinear sind. Daher gilt

$$F(x_1, x_2) = |a(x_1, x_2)| < 1 \quad \text{in } S = \{(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2 : \|x_1\| = \|x_2\| = 1\}.$$

Die stetige Funktion $F$ nimmt auf der kompakten Menge $S$ das Maximum an, also

$$|a(x_1, x_2)| \leq \gamma < 1 \quad \forall (x_1, x_2) \in S.$$

Der Rest folgt mit einem Homogenitätsargument.

b) Da $x^{i+1/2} \perp X_1$ und $x^{i+1} \perp X_2$ gilt auch für diese die verschärfte Cauchy-Ungleichung, also

$$\|x^{i+1}\|^2 = a(x^{i+1}, x^{i+1/2} + w_2) = a(x^{i+1}, x^{i+1/2}) \leq \gamma \|x^{i+1}\| \, \|x^{i+1/2}\|.$$

**20** Die Symmetrie und $(x, x) = \|x\|^2$ sind offensichtlich. Aus der Definition und der Parallelogrammgleichung folgt

$$(x, z) + (y, z) = \frac{1}{4}(\|x + z\|^2 - \|x - z\|^2 + \|y + z\|^2 - \|y - z\|^2)$$

$$= \frac{1}{2}\Big(\Big\|\frac{x + y}{2} + z\Big\|^2 - \Big\|\frac{x + y}{2} - z\Big\|^2\Big) = 2\Big(\frac{x + y}{2}, z\Big).$$

Für $y = 0$ folgt hieraus $(x, z) = 2(x/2, z)$, also auch die Additivität $(x, z) + (y, z) = (x + y, z)$. Durch Induktion erhalten wir $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$ für $\alpha = m2^{-n}$. Im normierten Raum sind $\|\alpha x + y\|$ und $\|\alpha x - y\|$ stetig in $\alpha$. Daher gilt $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$.

**21** Wegen $|\ln(t/2)|^{-1} \to 0$ für $t \to 0$ ist $x$ auf dem ganzen Intervall $[0, 1]$ stetig. Wegen

$$\frac{1}{t}|x(t) - x(0)| = \frac{1}{t}|\ln(t/2)|^{-1}$$

ist die Hölder-Bedingung für kein $\alpha > 0$ erfüllt.

**22** Der Raum der Polynome vom Grad $\leq k$ ist als endlich dimensionaler Unterraum abgeschlossen und enthält keine inneren Punkte.

**23** a) Ist $x \in \operatorname{int} M$, so $B_\varepsilon(x) \subset M$ und damit $x + \varepsilon' y \in M$ für genügend kleines $\varepsilon'$.

b) Wegen a) brauchen wir nur $M^a \subset \operatorname{int} M$ zu zeigen. Sei also $x \in M^a$. Dann gibt es zu jedem $y \in X$ ein $k \in \mathbb{N}$ mit $x \pm \frac{1}{k} y \in M$. Daher

$$X = \cup_{k=1}^{\infty} k\big((M - x) \cap (-M + x)\big).$$

Da $M - x$ und $-M + x$ abgeschlossen sind, gibt es nach dem Satz von Baire ein $k_0$ mit

$$\operatorname{int} k_0\big((M - x) \cap (-M + x)\big) \neq \emptyset,$$

daher $B_\varepsilon(z) \subset (M - x) \cap (-M + x)$ für ein $\varepsilon > 0$ und ein $z$. Also auch $B_\varepsilon(z) + x \subset M$ und $-B_\varepsilon(z) + x \subset M$. Aus der Konvexität von $M$ folgt

$$B_\varepsilon(x) = \frac{1}{2}(B_\varepsilon(z) + x) + \frac{1}{2}(-B_\varepsilon(z) + x) \subset M.$$

c) $X = \mathbb{R}$, $M = \mathbb{Q}$.

**24** Sei $x_k \to x_0$ in $X$ und $y_k \to y_0$ in $Y$. Setze

$$f_k(x) = b(x, y_k).$$

Dann ist $f_k \in X'$ und wegen $f_k(x) \to b(x, y_0)$ folgt aus dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit, daß $\|f_k\| \leq K$. Aus

$$b(x_k, y_k) - b(x_0, y_0) = f_k(x_k - x_0) + b(x_0, y_k - y_0)$$

folgt daher $b(x_k, y_k) \to b(x_0, y_0)$.

**25** Sei $x_k \to x$ und $Tx_k \to z$. Dann ist $x_k - x \to 0$ und $T(x_k - x) \to y$. Aus der Bedingung folgt $y = 0$ und damit $Tx_k \to Tx$. Daher ist der Graph von $T$ abgeschlossen. Die Bedingung ist daher zur Abgeschlossenheit des Graphen äquivalent. Die Behauptung folgt aus dem Satz vom abgeschlossenen Graphen.

**26** $X_1 = (X, \|\cdot\|_1)$ und $X_2 = (X, \|\cdot\|_2)$ sind Banach-Räume mit $Id : X_2 \to X_1$ stetig und bijektiv. Nach dem Satz vom inversen Operator ist auch $Id^{-1}$ stetig.

**27** a) Für $f \in (c_0)'$ setze $f(i,j) = fe_{ij}$, wobei $e_{ij}$ den kanonischen Einheitsvektor bezeichnet. Für endliche Folgen gilt dann

$$x = \sum_{i,j=1}^{K} x(i,j)e_{ij}, \quad f(x) = \sum_{i,j=1}^{K} x(i,j)f(i,j), \quad \|f\|_{c_0'} \leq \sum |f(i,j)|.$$

Damit können wir wegen der Stetigkeit von $f$ den Grenzübergang $K \to \infty$ durchführen. $\|f\| = \sum |f(i,j)|$ beweist man durch die Wahl $x(i,j) = \overline{f(i,j)}/f(i,j)$, falls $f(i,j) \neq 0$.

b) Ist $x_k \to x$ in $l_1$, so auch $x_k(i,1) \to x(i,1)$ und $\sum_{j=2}^{\infty} x_k(i,j) \to \sum_{j=2}^{\infty} x(i,j)$.

c) Jede schwache$*$ Umgebung eines $f \in l_1$ ist von der Form

$$U = \cap_{k=1}^{K} \big\{ g \in l_1 : |g(x_k) - f(x_k)| < \varepsilon \big\},$$

wobei $K \in \mathbb{N}$ und $x_1, \ldots, x_K \in c_0$. Wir müssen zeigen, daß in jeder solcher Umgebung ein Element von $M$ liegt. Es gibt ein $I$, so daß $\tilde{f} \in l_1$ mit

$$\tilde{f}(i,j) = f(i,j) \ \text{ für } i,j \leq I, \quad \tilde{f}(i,j) = 0 \ \text{ sonst},$$

der Abschätzung $|\tilde{f}(x_k) - f(x_k)| < \varepsilon/2$, $k = 1, \ldots, K$, genügt, denn es gibt nur endlich viele solcher $x_k$. Für $l > I$ sei $g_l \in M$ definiert durch

$$g_l(i,j) = f(i,j) \ \text{ für } i,j \leq I, \quad g_l(i,l) = i g_l(i,1) - \sum_{j=2}^{I} g(i,j) \ \text{ für } i \leq I,$$

für alle anderen $(i,j)$ sei $g(i,j) = 0$. Wegen $x_k(i,j) \to 0$ läßt sich durch die Wahl eines genügend großen $l$ ereichen, daß $|g_l(i,l) x_k(i,l)| < \varepsilon/2$ für alle $k = 1, \ldots, K$. Daher

$$|g_l(x_k) - f(x_k)| \leq |g_l(x_k) - \tilde{f}(x_k)| + |\tilde{f}(x_k) - f(x_k)| < \varepsilon.$$

d) Für $g \in B \cap M$ gilt

$$|g(i,1)| \leq \frac{\|g\|_{l_1}}{i} \leq \frac{1}{i}.$$

Wir wählen $x = e_{i,1}$ und $f = 2e_{i,1}/i$. Dann gilt für die schwache$*$ Umgebung von $f$

$$U = \{g : |g(i,1) - \frac{2}{i}| < \frac{1}{i}\},$$

daß $g \notin U$ für alle $g \in B \cap M$. Wegen $\|f\| = 2/i$ enthält der schwache$*$ Abschluß von $B \cap M$ keine offene Kugel $B_r(0)$. Für andere Kugeln beweist man das ganz analog.

**28** Der abgeschlossene Unterraum $U$ ist nach Satz 3.30 ebenfalls ein reflexiver Banach-Raum. Das Funktional $F(u) = \|x - u\|$ ist konvex auf $U$ wegen

$$\begin{aligned} F(tu + (1-t)v) &= \|x - tu - (1-t)v\| = \|t(x-u) + (1-t)(x-v)\| \\ &\leq t\|x-u\| + (1-t)\|x-v\| = tF(u) + (1-t)F(v) \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt aus Satz 3.36.

**29** Die Existenz einer Lösung ist gerade Satz 3.36. Sind $x \neq y$ zwei Minima von $f$ in $K$, also $f(x) = f(y) = d$, so folgt aus der strikten Konvexität $f(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y) < d$, Widerspruch!

**30** Die Implikation „$\Leftarrow$" folgt aus

$$\int_{\varepsilon}^{e^{-1}} t^{-1} |\ln t|^{\alpha p}\, dt = -\frac{1}{\alpha p + 1} |\ln t|^{\alpha p + 1} \Big|_{\varepsilon}^{e^{-1}}.$$

Für die umgekehrte Richtung brauchen wir nur den Fall $\alpha p = -1$ zu betrachten, weil dieser $\alpha p > -1$ minorisiert. Da $\ln|\ln t|$ die Stammfunktion von $t^{-1}|\ln t|^{-1}$ ist, existiert das zugehörige Integral nicht.

**31** Der Fall $q = p$ ist offensichtlich, sei deshalb $q < p$. Wir verwenden die Höldersche Ungleichung mit $\alpha = p/q$ und $\alpha' = p/(p-q)$,

$$\|Tu\|_q^q = \int_\Omega |v|^q |u|^q \, dx \leq \Big( \int_\Omega |v|^{pq/(p-q)} \, dx \Big)^{(p-q)/p} \Big( \int_\Omega |u|^p \, dx \Big)^{q/p},$$

daher

$$\|Tu\|_q \leq \|v\|_{pq/(p-q)} \|u\|_p,$$

also $\|T\| \leq \|v\|_{pq/(p-q)}$.

Für die spezielle Wahl $u = |v|^{q/(p-q)} \operatorname{sign} v$ folgt

$$\|T\| \geq \frac{\|Tu\|_q}{\|u\|_p} = \frac{\|v\|_{pq/(p-q)}^{p/(p-q)}}{\|v\|_{pq/(p-q)}^{q/(p-q)}} = \|v\|_{pq/(p-q)}.$$

**32** a) Für $a, b \in \mathbb{R}$ und $0 < p \leq 1$ gilt

$$|a + b|^p \leq (|a| + |b|)^p \leq |a|^p + |b|^p.$$

Daher

$$\int_0^1 |u - v|^p \, dx \leq \int_0^1 |u|^p \, dx + \int_0^1 |v|^p \, dx$$

und $d(u, v)$ existiert auf $L^p(\Omega)$. Die Dreiecksungleichung erhalten wir, indem wir hier $u$ durch $u - v$ und $v$ durch $v - w$ ersetzen.

b) Sei $A$ wie im Hinweis angegeben. Zu jedem $u \in L^p$ gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ mit $k^{p-1} d(u, 0) < r$. Sei $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_k = 1$ mit

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} |u|^p \, dx = k^{-1} d(u, 0), \quad 1 \leq i \leq k.$$

Für $v_i(x) = ku(x)$ für $x_{i-1} < x < x_i$ und $v_i(x)$ sonst gilt dann

$$d(v_i, 0) = k^{p-1} d(u, 0) < r.$$

Da $A$ konvex ist, liegt auch die Funktion

$$u = \frac{1}{k}(v_1 + \ldots + v_k)$$

in $A$.

c) Sei $f$ ein lineares Funktional auf dem Vektorraum $X$. Für $f(x), f(y) \in B_r(0)$ gilt wegen der Linearität von $f$ und der Konvexität von $B_r(0)$

$$f(tx + (1-t)y) = tf(x) + (1-t)f(y) \in B_r(0).$$

d) Nach b) und c) ist $(L^p)' = \{0\}$.

**33** Sei $p'$ mit $p^{-1} + p'^{-1} = 1$ und $p' = \infty$ für $p = 1$. Mit der Hölderschen Ungleichung folgt

$$\begin{aligned}|u(x) - u_h(x)| &\leq \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} |u(x) - u_h(\xi)|\,d\xi \\ &= \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} |u(x) - u_h(x+t)|\,dt \\ &\leq \frac{1}{(2h)^{1/p}}\Big(\int_{-h}^{h} |u(x) - u_h(x+t)|^p\,dt\Big)^{1/p}.\end{aligned}$$

Wir heben dies in die $p$-te Potenz und integrieren bezüglich $x$,

$$\|u - u_h\|_p^p \leq \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}\int_{\mathbb{R}} |u(x) - u(x+t)|^p\,dx\,dt.$$

Auf die gleiche Art zeigt man

$$\|u_h\|_p^p \leq \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}\int_{\mathbb{R}} |u(x+t)|^p\,dx\,dt = \|u\|_p^p.$$

Mit einer Approximation $\phi \in C_0^0(0,1)$ von $u$ folgt dann

$$\begin{aligned}\|u - u_h\|_p &\leq \|u - \phi\|_p + \|\phi - \phi_h\|_p + \|\phi_h - u_h\|_p \\ &\leq 2\|u - \phi\|_p + \|\phi - \phi_h\|_p.\end{aligned}$$

Die Behauptung folgt aus der gleichmäßigen Stetigkeit von $\phi$.

**34** a) Die Abbildungen $T_\pm u = (u' \pm 1)^2$, $T : H^{1,2} \to L^1$ sind stetig, ebenso ist die Minimumfunktion $\min : L^1 \times L^1 \to L^1$ stetig, daher ist auch $F$ stetig.

b) Wir verwenden die stetige, stückweise lineare Zickzackfunktion $u_k$, die beständig zwischen $1/k$ und $-1/k$ oszilliert mit Ableitung $\pm 1$. Der Minimumanteil im Funktional $F$ verschwindet für diese Funktionen und es gilt $F(u_k) \to 0$ für $k \to \infty$. Da $F$ nicht konvex ist, entsteht kein Widerspruch zu Satz 3.36.

**35** Es gilt

$$\max\{u, v\} = (u - v)_+ + v, \quad \min\{u, v\} = (u - v)_- + v.$$

Die Behauptung folgt aus Satz 5.20.

**36** Für $u \in C_0^\infty(\Omega)^n$ folgt mit partieller Integration

$$\int_\Omega D_i u_j D_j u_i\,dx = -\int_\Omega D_{ij}^2 u_j u_i\,dx = \int_\Omega D_j u_j D_i u_i\,dx.$$

Mit Hilfe dieser Beziehung erhalten wir

$$\begin{aligned}
2\int_\Omega \underline{D}u\cdot\underline{D}u\,dx &= \frac{1}{2}\sum_{i,j}\int_\Omega (D_iu_j+D_ju_i)^2\,dx\\
&= \frac{1}{2}\sum_{i,j}\int_\Omega \left(|D_iu_j|^2+|D_ju_i|^2+2D_iu_jD_ju_i\right)dx\\
&= \|Du\|^2+\|\operatorname{div}u\|^2.
\end{aligned}$$

Da $C_0^\infty(\Omega)^n$ dicht in $H_0^{1,2}(\Omega)^n$, ist dies auch für alle $u$ in $H_0^{1,2}(\Omega)^n$ richtig.

**37** a) In Polarkoordinaten ist

$$\Delta = \frac{1}{r}D_r(rD_r)+\frac{1}{r^2}D^2_{\phi\phi}.$$

Daher ist $u(r,\phi)=\phi$ die gesuchte Lösung.

b) wir drehen und verschieben das Koordinatensystem so, daß $x_0=0$ und der Rand von $\partial\Omega$ in Umgebung des Nullpunkts mit $x_2=0$ übereinstimmt. Für eine Abschneidefunktion $\tau$ mit $\tau=1$ in Umgebung von 0 gilt in dieser Umgebung

$$-\Delta(\tau\phi)=-\Delta\phi=0.$$

Wir bestimmen daher

$$-\Delta u_0=-\Delta(\tau\phi)\ \text{ in }\Omega,\quad u_0=g-\tau\phi\ \text{ auf }\partial\Omega.$$

Diese Gleichung ist eindeutig schwach lösbar mit $u_0\in C^\infty(\overline{\Omega})$. $u=u_0+\tau\phi$ ist dann die gesuchte Lösung. Die Eindeutigkeit von $u$ folgt aus dem klassischen Maximumprinzip.

**38** a) Die Funktion $v=u-I_hu$ erfüllt $v(0)=v(h)=0$. Sei $x_0$ ein Punkt, in dem das Maximum von $|v|$ angenommen wird. OBdA kann $x_0\le h/2$ vorausgesetzt werden. Mit Taylor folgt dann

$$0=v(0)=v(x_0)+v'(x_0)(0-x_0)+\frac{1}{2}v''(\xi)(0-x_0)^2,\quad 0<\xi<\frac{h}{2},$$

also $\|v\|_\infty\le h^2\|v''\|_\infty/8$. Diese Abschätzung ist scharf, wie das Beispiel $h=1$, $v(x)=x(1-x)$ mit $\|v\|_\infty=1/4$, $\|v''\|_\infty=2$ beweist.

b) In diesem Fall erhält man aus Taylor $0=v(x_0)+v'(\xi)(0-x_0)$. Mit $x_0\le 1/2$ folgt dann $\|v\|_\infty\le h\|v'\|_\infty/2$. Diese Schranke wird allerdings nur für eine stückweise lineare Funktion angenommen, die nicht im Raum $C^1$ liegt.

**39** Es gilt $(P_k-Id)e_{k+1}=-e_{k+1}$, daher $\|P_k-Id\|=1$.

**40** Sei $T$ kompakt und $x_k\rightharpoonup x$ in $X$. Da eine schwach konvergente Folge beschränkt ist, ist $Tx_k\to y$ für eine Teilfolge, die wir wieder mit $(x_k)$ bezeichnen. Aus $x_k\rightharpoonup x$ folgt für alle $y'\in Y'$

$$\langle Tx_k, y'\rangle = \langle x_k, T'y'\rangle \ \to\ \langle x, T'y'\rangle = \langle Tx, y'\rangle$$

und $Tx_k \rightharpoonup Tx$. Da der schwache und der starke Grenzwert übereinstimmen, folgt $Tx = y$. Dieses Argument ist nun für *jede* Teilfolge von $(x_k)$ richtig, also konvergiert die gesamte Folge $(Tx_k)$ gegen $Tx$.

Die umgekehrte Richtung ist einfach. Jede beschränkte Folge besitzt nach Satz 3.32 eine schwach konvergente Teilfolge. Diese wird nach Voraussetzung auf eine stark konvergente Folge abgebildet. Damit ist $T$ kompakt.

**41** a) Es gilt $\|[x]\|_{X/U} \le \|x\|_X$. Ist $\|[x]\|_{X/U} < 1$, so gibt es ein $u \in U$ mit $\|x - u\| < 1$, womit die Abbildung $[\cdot]$ surjektiv ist.

b) Nach Aufgabe 7 gibt es einen Banach-Raum $X$ und einen abgeschlossenen Unterraum $U$, so daß $\operatorname{dist}(x, U) = \inf_{u\in U} \|x-u\|_X$ für alle $x \in X\setminus U$ nicht angenommen wird. Dies bedeutet aber, daß für $x \in X \setminus U$ mit $\|[x]\|_{X/U} = 1$ gilt $\|x\|_X > 1$.

**42** a) Es gilt $x \sim y$ genau dann, wenn $\lim x(i) = \lim y(i)$, daher $X/U \cong \mathbb{R}$. Ferner

$$\|[x]\|_{X/U} = \inf\{\|x - y\|_{l_\infty} : y \in c_0\} = \lim x(i).$$

b) $U$ ist Banach-Raum, denn wenn $(x_k)$ eine Cauchy-Folge in $U$ ist, so $x_k(\frac{1}{i}) = 0$ und daher auch $x(\frac{1}{i}) = 0$. Es gilt $x \sim y$ genau dann, wenn $x(\frac{1}{i}) = y(\frac{1}{i})$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Weil $\lim x(\frac{1}{i})$ existiert, gilt $X/U \cong c(\mathbb{N})$.

Für $x \in C([0, 1])$ setze

$$x_k(t) = \begin{cases} \lim_{t\searrow 0} x(t) & \text{für } 0 \le t \le \frac{1}{k} \\ \quad x(t) & \text{für } t = \frac{1}{l},\ 1 \le l < k, \end{cases}$$

ansonsten sei $x_k$ stückweise linear mit „kleinem” Träger außerhalb des Intervalls $[0, 1/k]$ und der Punkte $1/l$, $1 \le l < k$. Es gilt dann $x - x_k \in U$ und

$$\|[x]\|_\infty \le \|x - (x - x_k)\|_\infty = \|x_k\|_\infty \ \to\ \|(x(\frac{1}{i}))\|_{l_\infty}.$$

**43** $\pi(F)$ ist endlich dimensional und damit abgeschlossen in $X/U$. Da $U+F = \pi^{-1}(\pi(F))$ und $\pi$ stetig ist, ist $U + F$ abgeschlossen.

**44** „$\Rightarrow$”: Sei $(x_k, Px_k) \to (x, v)$, also $x_k \to x$ und $Px_k \to v$ in $X$. Da $V$ abgeschlossen ist, gilt $v \in V$. Nach Definition ist $u_k = x_k - Px_k \in U$, wegen der Abgeschlossenheit von $U$ gilt $u_k \to u \in U$. Daher $x = u + v$ und $Px = v$. Damit ist der Graph von $P$ abgeschlossen und $P$ stetig.

„$\Leftarrow$”: Ist $P$ stetig, so ist $U = \mathcal{N}(P)$ abgeschlossen. Gleiches gilt für $V = \mathcal{R}(P) = \mathcal{N}(Id - P)$.

**45** Angenommen, für ein $\varepsilon > 0$ gibt es ein solches $c(\varepsilon)$ nicht. Dann existieren $x_k \in X$ mit $\|x_k\|_X = 1$ und

$$(*) \qquad \|Kx_k\|_Y \ge \varepsilon + k\|TKx_k\|_Z.$$

Da $K$ kompakt ist, gibt es eine Teilfolge, die wir wieder mit $(x_k)$ bezeichnen, mit $Kx_k \to y$ in $Y$. Wegen der Stetigkeit von $T$ gilt auch $TKx_k \to Ty$. Ist $y = 0$, so gilt für große $k$, daß $\|Kx_k\|_X < \varepsilon$, was $(*)$ widerspricht. Ist $y \neq 0$, so ist wegen der Injektivität von $T$ auch $\|Ty\|_Z > 0$. Auch in diesem Fall erhalten wir einen Widerspruch zu $(*)$ für genügend große $k$.

**46** a) Für $u \in C^0(\overline{\Omega})$ gilt

$$\|Tu\|_\infty \leq \sup_{x\in\Omega} \int_\Omega |K(x,y)|\,|u(y)|\,dy \leq \sup_{x\in\Omega} \int_\Omega |K(x,y)|\,dy\,\|u\|_\infty,$$

also $\|T\| \leq \sup \int_\Omega |K(x,y|\,dy$.

Da $K$ stetig ist, gibt es ein $x_0 \in \overline{\Omega}$ mit

$$\int_\Omega |K(x_0,y)|\,dy = \sup_x \int_\Omega |K(x,y)|\,dy.$$

Die Funktion $u(y) = \operatorname{sign} K(x_0,y)$ wird durch Null auf den $\mathbb{R}^n$ fortgesetzt. Es gilt $J_\varepsilon * u \to u$ fast überall und $|J_\varepsilon * u| \leq 1$. Mit dem Satz von Lebesgue folgt daher

$$\begin{aligned} TJ_\varepsilon * u(x_0) &= \int_\Omega K(x_0,y) J_\varepsilon * u(y)\,dy \\ &\to \int_\Omega K(x_0,y)u(y)\,dy = \int_\Omega |K(x_0,y)|\,dy. \end{aligned}$$

b) Da $K$ gleichmäßig stetig ist, gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so daß für $|x_1 - x_2| < \delta$ gilt

$$\int_\Omega |K(x_1,y) - K(x_2,y)|\,dy \leq \varepsilon$$

und daher

$$|Tu(x_1) - Tu(x_2)| \leq \int_\Omega |K(x_1,y) - K(x_2,y)|\,|u(y)|\,dy \leq \varepsilon\|u\|_\infty.$$

Damit werden beschränkte Funktionen auf gleichmäßig stetige Funktionen abgebildet und $T$ ist kompakt.

**47** Aus $\phi T = 0$ folgt $T(\phi\psi) = 0$. Setzen wir hier eine Funktion mit $\psi = 1$ auf dem Träger von $\phi$, so folgt $T\phi = 0$. Die umgekehrte Richtung gilt natürlich nicht.

**48** Der Träger von $\phi$ sei nach oben durch $a > 0$ beschränkt. Nach Taylor gilt

$$\phi(x) = p_{n-1}(x) + r(x)$$

mit einem Polynom vom Grade $\leq n-1$ und einer Funktion $r$ mit $|r(x)| \leq cx^n$. Damit ist $\int_\varepsilon^a x^{-n} r(x)\,dx$ als Funktion von $\varepsilon$ beschränkt. Für $n > 1$ gilt

$$\int_\varepsilon^a \frac{p_{n-1}(x)}{x^n}\,dx = \frac{1}{-n+1}\int_\varepsilon^a (x^{-n+1})' p_{n-1}(x)\,dx$$
$$= -\frac{1}{-n+1}\int_\varepsilon^a x^{-n+1} p'_{n-1}(x)\,dx + \frac{1}{-n+1} x^{-n+1} p'_{n-1}(x)\Big|_\varepsilon^a .$$

Auf diese Weise wird die Singularität schrittweise beseitigt, für $n = 1$ bekommen wir den Randterm $c \ln x\, p_{n-1}^{(n-1)}(x)\big|_\varepsilon^a$, der den Term $a_0(\phi)\ln\varepsilon$ erzeugt. Die $a_0(\phi), \dots, a_{n-2}(\phi)$ sind damit Linearkombinationen von Ableitungen $\phi^k(0)$.

**49** Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $R = R(\varepsilon)$ mit $\int_{B_R} f\,dx = 1-\varepsilon$. Sei $\phi \in \mathcal{D}$. Mit Hilfe der Transformation $y = x/\lambda$ folgt

$$\int f_\lambda(x)\phi(x)\,dx = \int \lambda^{-n} f(x/\lambda)\phi(x)\,dx = \int f(y)\phi(\lambda y)\,dy$$
$$= \int_{B_R} f(y)\phi(\lambda y)\,dy + \int_{\mathbb{R}^n\setminus B_R} f(y)\phi(\lambda y)\,dy = A + B.$$

Für den Term $A$ verwenden wir

$$\phi(\lambda y) = \phi(0) + D\phi(\xi)\lambda y.$$

Wegen $|D\phi| \le c$ folgt dann

$$A \;\to\; \int_{B_R} f(y)\phi(0)\,dy = (1-\varepsilon)\phi(0).$$

Für $B$ gilt

$$|B| \le \|\phi\|_\infty \int_{\mathbb{R}^n\setminus B_R} f(y)\,dy = \varepsilon\|\phi\|_\infty .$$

**50** a) Es gilt

$$\int H(x)\mathrm{e}^{-ax}\,dx = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax}\,dx = \frac{1}{-a}\mathrm{e}^{-ax}\Big|_0^\infty = \frac{1}{a}.$$

Die Konvergenz $H(x)\mathrm{e}^{-ax} \to H(x)$ folgt direkt aus dem Satz von Lebesgue.

b) Aus der Definition der Fourier-Transformation folgt

$$\mathcal{F}(H(\cdot)\mathrm{e}^{-a\cdot})(\xi) = (2\pi)^{-1}\int \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi} H(x)\mathrm{e}^{-ax}\,dx$$
$$= (2\pi)^{-1}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x(\mathrm{i}\xi+a)}\,dx = \frac{1}{2\pi(a+\mathrm{i}\xi)}.$$

c) Wir ersetzen im vorigen Aufgabenteil $2\pi a$ durch $a$. Mit Hilfe des Hinweises folgt

$$\int \frac{\phi(\xi)}{a+2\pi\mathrm{i}\xi}\,d\xi = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int D_\xi \ln(a+2\pi\mathrm{i}\xi)\phi(\xi)\,d\xi$$
$$= -\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int \ln(a+2\pi\mathrm{i}\xi)D_\xi\phi(\xi)\,d\xi = A+B$$

mit

$$A = -\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int \ln\sqrt{a^2+4\pi^2\xi^2}D_\xi\phi(\xi)\,d\xi, \quad B = -\frac{1}{2\pi}\int \arctan\frac{2\pi\xi}{a}D_\xi\phi(\xi)\,d\xi.$$

In A können wir den Grenzübergang $a \to 0$ durchführen, die Behauptung folgt dann mit Aufgabe 9.13. Für den zweiten Term gilt

$$B \to -\frac{1}{2\pi}\int \frac{\pi}{2}\operatorname{sign}\xi\, D_\xi\phi(\xi)\,d\xi = \frac{1}{4}(\operatorname{sign}\xi)' = \frac{1}{2}\delta_0.$$